

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
FAKULTA STROJNÍ



Institut dopravy

Využití Cluster-First Route-Second přístupu pro návrh tras svozu komunálního odpadu

**Application of Cluster-First Route-Second Approach for Municipal
Waste Collection Vehicles Routing Design**

student: Bc. Milan Sobek
vedoucí práce: Ing. Mgr. Petr Kozel, Ph.D.

OSTRAVA 2020

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Milan Sobek**

Studijní program: N2301 Strojní inženýrství

Studijní obor: 2301T003 Dopravní technika a technologie

Specializace: 20 Silniční doprava

Téma: **Využití Cluster-First Route-Second přístupu pro návrh tras svozu
komunálního odpadu**
**Application of Cluster-First Route-Second Approach for Municipal
Waste Collection Vehicles Routing Design**

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

Cíl práce: Na zadané dopravní síti navrhnout s ohledem na kapacity obslužných vozidel shluky zákazníků a v nich následně realizovat návrh optimálních tras těchto vozidel.

Osnova práce:

1. Úvod.
2. Charakteristika problému.
3. Teoretická východiska řešení.
4. Tvorba matematických modelů.
5. Výpočetní experimenty.
6. Interpretace výsledků a ekonomické zhodnocení.
7. Závěr.

Seznam doporučené odborné literatury:


- Bramel, J., Chen, X. and Simchi-Levi, D. The Logic of Logistic. 3rd Edition. Springer: New York, 2014, ISBN 978-1-4614-9184-4.
- Janáček, J. Optimalizace na dopravních sítích. Žilina: EDIS, 2006, ISBN 80-8070-586-0.
- Palúch S., Peško, Š. Kvantitativne metódy v logistike. Žilina: EDIS, 2006, ISBN 80-8070-636-0.
- Saha Ray, S. Graph theory with algorithms and its applications: in applied science and technology. New York: Springer, 2013, ISBN 978-81-322-0749-8.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

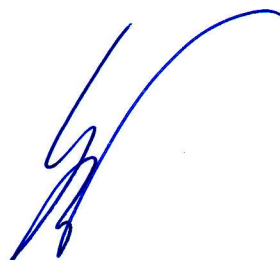
Vedoucí diplomové práce: **Ing. Mgr. Petr Kozel, Ph.D.**

Datum zadání: 20.12.2019

Datum odevzdání: 18.05.2020

Aleš 

prof. Ing. Aleš Slíva, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Výsledky předložené diplomové práce jsou začleněny do širšího projektu TAČR TH02010930 „*RETIA - Efektivní přístupy k úsporným a adaptabilním systémům údržby a obsluhy dopravních sítí*“, který je řešen na Ekonomické fakultě Vysoké školy báňské - Technické univerzity v Ostravě.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením Ing. Mgr. Petra Kozla, Ph.D., a s použitím všech uvedených podkladů a literatury.

V Ostravě dne 15. května 2020



Bc. Milan Sobek

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu své diplomové práce Ing. Mgr. Petru Kozlovi, Ph.D., za odbornou spolupráci, rady a připomínky k mé práci. Dále bych rád poděkoval Ing. Lucii Orlíkové, Ph.D., za pomoc při zpracování dat v prostředí ArcGIS.

ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

SOBEK, M. *Využití Cluster-First Route-Second přístupu pro návrh tras svozu komunálního odpadu*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Institut dopravy, 2020, 63 s. Vedoucí práce: Ing. Mgr. Petr Kozel, Ph.D.

Diplomová práce se zabývá plánováním okružních jízd pro svoz komunálního odpadu. Předmětem řešení předložené diplomové práce je naplánovat na zadané reálné dopravní síti množinu okružních jízd pro obslužná vozidla s využitím metod primárního shlukování. K řešení je využíváno poznatků z oblasti teorie grafů a matematického programování. Navržené matematické modely jsou výpočetně ověřeny na vzorových příkladech s využitím výpočetního prostředí programu Xpress-IVE. Následně jsou provedeny výpočty na reálných datech, jejichž výstupem je již zmíněná množina okružních jízd, obsahující trasy pro obslužná vozidla zabezpečující svoz odpadu.

ANNOTATION OF DIPLOMA THESIS

SOBEK, M. *Application of Cluster-First Route-Second Approach for Municipal Waste Collection Vehicles Routing Design*. Ostrava: VSB - Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, The Institute of Transport, 2020, 63 p. Thesis head: Ing. Mgr. Petr Kozel, Ph.D.

The theme of this diploma thesis is planning tours for collection of municipal waste. The main goal is to plan the number of roundabouts for vehicle management on a given real transport network using the Cluster-First Route-Second method. The thesis is based on theoretical knowledge from the field of graphs theory and mathematical programming. The proposed mathematical models are computationally verified on sample examples using the Xpress-IVE program environment. In the next part I performed calculations on real data. The solution of this experiments is a set of round trips with routes for the vehicles providing collection of waste.

Obsah

1	Úvod	5
2	Trasovací úlohy	7
3	Teoretická východiska	10
3.1	Teorie grafů	10
3.2	Reprezentace grafů	15
3.3	Cesty v grafech	20
3.4	Matematické programování	22
3.5	Modelování v Xpress-IVE	24
4	Cluster-First Route-Second	26
4.1	Formulace problému	26
4.2	Sweep algoritmus (stírací algoritmus)	27
4.3	P-medián	33
4.4	Heuristické metody	36
4.5	Metoda nejbližšího, dosud nenavštíveného vrcholu	37
4.6	Lin–Kernighanova metoda	39
5	Numerické experimenty na reálných datech	42
5.1	Představení vstupních dat	42
5.2	Dekompozice úlohy	44
5.3	Interpretace a zhodnocení dosažených výsledků	45
6	Závěr	50
	Literatura	52
	Seznam zkratk	54
	Seznam obrázků a tabulek	
	Prohlášení o využití výsledků diplomové práce	
	Přílohy	

Kapitola 1

Úvod

Veškerá lidská výrobní, ale i nevýrobní činnost je provázená vznikem odpadů. Jejich odstranění a následné využití proto představuje prvořadý úkol z hlediska ochrany životního prostředí, a taktéž i z pohledu ekonomického. Proto má smysl hledat způsoby, jak efektivně nakládat s odpadem nebo také, jak zajistit svoz komunálního a separovaného odpadu.

Svoz odpadu a jeho následné zpracování je pro moderní civilizaci naprostou samozřejmostí a běžnou službou. Když se ale nad samotným poskytováním této služby zamyslíme, zjistíme, že se jedná o neustále se opakující, každodenní proces, ve kterém obsluhává vozidla, dle předem stanovených denních tras, vykonávají pravidelný sběr odpadů. Tato skutečnost umožňuje hledat způsoby, jak každodenní obsluhu na daných trasách zefektivnit.

Statistické údaje jen potvrzují smysl, který má hledání nových řešení sloužících ke zkvalitnění této služby. Nahlédneme-li do tuzemských statistik, můžeme zjistit, že produkce odpadů se každoročně zvyšuje. I když se růst zpomaluje, nic to nemění na skutečnosti, že každoročně vyprodukujeme téměř 4 miliony tun komunálního odpadu. Přesněji řečeno podle Českého statistického úřadu bylo například v roce 2018 na území České republiky svezeno celkem 3,7 mil. tun odpadů, přičemž 16% z tohoto množství činil sběr separovaného odpadu jako je papír, plast, sklo a podobně [15].

Ekonomická prosperita států s sebou přináší obrovský nárůst produkce odpadů, na které poukazují nejen již zmíněné české, ale i světové statistiky. Tato produkce by se mohla stát v blízké budoucnosti neudržitelnou, jak předpovídaly některé modely, vycházející například z rychlosti populačního růstu a schopnosti vyprodukované odpady zpracovat. Za tímto účelem vznikla celá řada projektů, které podporují nejen hledání nových řešení v oblasti odpadového hospodářství, ale například také v problematice obslužnosti dopravních sítí, které s touto problematikou úzce souvisí. Příkladem je projekt TAČR, jehož součástí je i tato diplomová práce.

Problematice svozu odpadu je tedy vhodné věnovat náležitou pozornost. Předložená diplomová práce je zaměřena na samotný svoz, respektive na plánování tras obslužných vozidel, které svoz odpadu zabezpečují. Konkrétně se bude jednat o plánování tras obslužných vozidel na území obce Bystřice, která se nachází v Moravskoslezském kraji. K

dispozici je celá řada metod určených pro podporu rozhodování v praxi. V rámci jednotlivých kapitol budou tyto nástroje a metody určené pro podporu rozhodování představeny. Těmito nástroji jsou především teorie grafů a matematické programování.

Kapitola 2

Trasovací úlohy

Problematika svozu separovaného odpadu spadá mezi trasovací úlohy. Cílem těchto úloh je nalézt posloupnost vrcholů, začínající a končící v depu, která prochází přes všechny vrcholy u nichž je vyžadována obsluha a mající minimální délku. Takto nalezená posloupnost slouží poté k plánování tras obslužných vozidel, která svoz odpadu zabezpečují.

Úlohy trasování můžeme klasifikovat podle následujících kritérií [4].

- a) Čas uspokojování požadavků
- b) Počet středisek
- c) Velikost dopravního parku
- d) Typ dopravního parku
- e) Charakter požadavků v dopravní síti
- f) Poloha požadavků v dopravní síti
- g) Typ dopravní sítě
- h) Maximální doba pro projetí jedné trasy
- i) Operace prováděné u zákazníků
- j) Kritérium kvality řešení

Tato kritéria lze přímo aplikovat na vybranou problematiku svozu odpadu. U svozu komunálního odpadu, respektive separovaného odpadu se jedná o úlohu, kdy je čas pevně stanoven. Středisko je v úloze buď jedno, úloha typu depo - depo, nebo je v úloze více než jedno středisko, pak se jedná o úlohu typu depo - skládka. Vozový park může být z hlediska své velikosti složen z jediného vozidla nebo z více vozidel.

S ohledem na své určení svozu odpadu, je vozový park buď homogenní (stejnorodý) nebo heterogenní (různorodý). Různorodost spočívá například v kapacitě jednotlivých vozidel. Povaha požadavků je buď deterministická nebo stochastická. Z hlediska řešení problematiky se jedná především o deterministické požadavky, kde se pracuje s průměrnou hodnotou zátěže.

Důležitou roli hraje taktéž poloha požadavků v dopravní síti. Ty se mohou nacházet na hranách (úsecích), nebo ve vrcholech (uzlech), popřípadě v kombinaci obou variant. Dopravní síť je v těchto úlohách nejčastěji smíšená, obsahuje jak orientované, tak i

neorientované hrany. Doba, která je vymezena vozidlu na ujetí své trasy, není zadána. Obsluha zákazníků je zaměřena pouze na nákladku, neboť se jedná o svozovou úlohu.

Z hlediska kvality dosaženého řešení je vhodné vycházet ze stanovených kritérií. Tímto kritériem mohou být minimální hodnoty součtu ohodnocení úseků projetých vozidly (délka trasy, spotřeba pohonných hmot, pracovní doba). Nebo je tímto kritériem minimální počet tras a s ním potřebný počet vozidel v závislosti na nákladech spojených s jejich pořízením a provozem. Další kritérium může být smíšené, přičemž rozhodují celkové náklady na obsluhu a posledním kritériem může být minimaxové kritérium [4].

Z hlediska celkového objemu určeného ke svozu a kapacity obslužného vozidla, je nutné rozlišovat dva případy.

- V prvním případě je součet požadavků b_j od N zákazníků menší nebo roven celkové kapacitě k obslužného vozidla. V takovém případě se jedná o jednu okružní jízdu.

$$\sum_{j=1}^N b_j \leq k$$

- Druhý případ nastane, když je součet požadavků b_j od N zákazníků větší než je kapacita daného obslužného vozidla. V tomto případě již nelze obsluhu vykonat jedinou jízdou vozidla a jedná se o množinu okružních jízd.

$$\sum_{j=1}^N b_j > k.$$

Vzhledem k charakteru a rozloze zadané oblasti bude zapotřebí uskutečnit celkem r okružních jízd. Základní přístupy řešení této problematiky - množiny okružních jízd, budou nyní blíže představeny [4].

1. Metody primárního shlukování (Cluster-First Route-Second)

Tyto metody patří do skupiny dekompozičních heuristických metod, které úlohu okružních jízd řeší ve dvou fázích. V první fázi jsou zanedbány podmínky související s vlastní trasou vozidla a je zde řešeno pouze rozdělení zákazníků do shluků tak, aby každý z nich bylo možné obsloužit jedinou okružní jízdou vozidla. V druhé fázi jsou ve vytvořených shlucích hledány optimální trasy s využitím vhodného algoritmu.

2. Metody primárního trasování (Route-First Cluster-Second)

Stejně jako v první variantě jsou tyto metody založeny na dekompozici úlohy. Rozdíl však spočívá v tom, že tyto metody primárního trasování v první fázi zanedbávají kapacitní omezení vozidel. Celá úloha je tedy řešena vhodným algoritmem pro nalezení optimální trasy, a až ve druhé fázi je získaná trasa upravena tak, aby vznikl potřebný počet okružních jízd, respektující kapacitní omezení vozidel.

3. Metody využívající matematické programování

Podobně jako ve dvou předešlých metodách, tak i zde se jedná o dekompoziční, heuristickou metodu, která za pomoci uvolnění určité skupiny podmínek, rozloží úlohu na dvě jednodušší podúlohy, které jsou následně ve dvou fázích vyřešeny. Tyto podúlohy jsou však řešeny exaktně pomocí prostředků matematického programování.

4. Výměnné metody

Tyto heuristické metody zlepšují současné řešení tak, že nahradí část trasy jinou trasou zpravidla kratší, popřípadě jí přesunou na jiné místo tak, aby výsledná struktura snížila hodnotu účelové funkce.

5. Přesné metody

Do této skupiny spadají metody matematického programování, které bývají založeny na principu větví a řezů. Na rozdíl od obecných metod, tyto metody využívají v maximální možné míře specifík řešené úlohy k tomu, aby získaly rychlý a přesný odhad dolních hranic. Princip spočívá v získání co nejlepšího řezu, blížícího se k množině přípustných řešení, na základě všech známých matematických vlastností modelů okružních jízd, odpovídajících potřebám praxe.

V rámci řešení problematiky této diplomové práce bude využit první z uvedených možných přístupů řešení, tedy metody primárního shlukování. Dříve, než bude pozornost věnována představení metodám primárního shlukování (dále v textu označované jako CF-RS metody), je potřebné představit dvě teoretické oblasti s jejichž poznatky a pojmy bude dále pracováno. Jedná se o teorii grafů a matematické programování.

Kapitola 3

Teoretická východiska

Právě započatá kapitola je věnována problematice teorie grafů a matematickému programování. Jak již bylo zmíněno v úvodu, právě tyto oblasti tvoří teoretický základ pro další práci. Pozornost bude zaměřena na podrobné představení základních poznatků z těchto oblastí operačního výzkumu. Jako první bude představena teorie grafů.

3.1 Teorie grafů

Teorie grafů má významnou roli při modelování dopravních problémů, neboť je možné s její pomocí efektivně znázorňovat reálné dopravní sítě. Základním objektem v teorii grafů je graf tvořený vrcholy a hranami. Vrcholy představují důležitá místa v dopravní síti, může se jednat například o křižovatky, depa, zastávky a podobně. Hraný znázorňují spojnice mezi těmito významnými místy. Jsou jimi například pozemní komunikace.

Z historického hlediska spadají počátky teorie grafů již do 18. století a nejčastěji bývají spojovány s osobností švýcarského matematika Leonarda Eulera. Ten položil základy teorie grafů, když využil zjednodušeného modelu reálné dopravní sítě pro vyřešení matematické hádanky pomocí jednoduchého grafu. Dnes nachází teorie grafů uplatnění v nespočetném množství vědních oborů, zaměřených nejen na dopravní infrastrukturu, ale například také v oblasti internetových sítí, lékařství a podobně.

Podrobnějšímu představení základních teoretických pojmů a definic z oblasti teorie grafů, bude předcházet představení dopravní sítě. Reálná dopravní síť je charakterizována velkým množstvím dat. Pro potřeby optimalizačních výpočtů je vhodné pracovat s modelem dopravní sítě, tedy zjednodušenou dopravní sítí. Po zjednodušení dopravní sítě jsou zachovány pouze ty informace, které jsou pro řešení zadané úlohy nezbytné. Zjednodušení dopravní sítě bude popsáno v následující podkapitole.

3.1.1 Dopravní síť

V dopravní síti vystupují dva druhy objektů. Jedná se o vrcholy sítě, kterým odpovídají například sklady, křižovatky v silniční síti, respektive důležité body v dopravní síti. Druhou

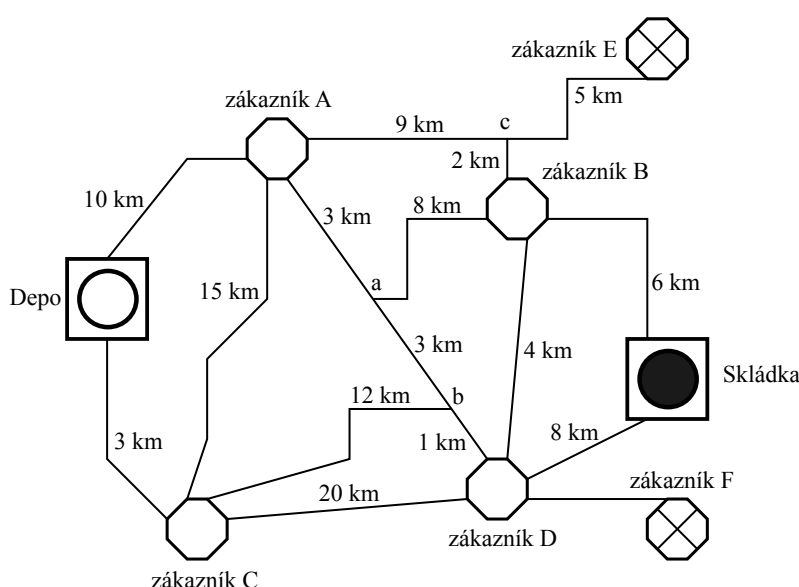
skupinu tvoří hrany, kde každá hrana spojuje právě dva vrcholy dopravní sítě. Tyto objekty představují nejčastěji pozemní komunikace mezi dvěma křižovatkami, sklady a podobně. Hrany také mohou představovat letecké koridory, plavební dráhy a další typy spojení dvou různých míst, podle charakteru řešené úlohy. Dopravní síť je tedy dána množinou vrcholů a hran, kde pro každou dvojici vrcholů existuje alespoň jedna cesta, která je spojuje.

Dopravní síť je možné rozdělit na:

- reálnou dopravní síť, která vychází ze skutečné dopravní sítě,
- model dopravní sítě, který reálnou dopravní síť zjednodušuje.

Tvorba modelu dopravní sítě je z hlediska následného zpracování a řešení podstatnou částí. Při návrhu nebo obsluze dopravního systému je málokdy potřebný detailní popis reálné dopravní sítě, obsahující všechny body vycházející z přesné topologie dané oblasti. To znamená, že za účelem zjednodušení není potřebné znát množinu všech vrcholů korespondujících se všemi křižovatkami v dané oblasti nebo množinu všech hran odpovídajících veškerým pozemním komunikacím v dané části dopravní sítě. Proto je možné vytvořit zjednodušený popis dopravní sítě, obsahující pouze informace spojené s řešením dané problematiky [4].

Reálná dopravní síť může mít, podle dříve zmíněných předpokladů podobu uvedenou na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1 Reálná dopravní síť.

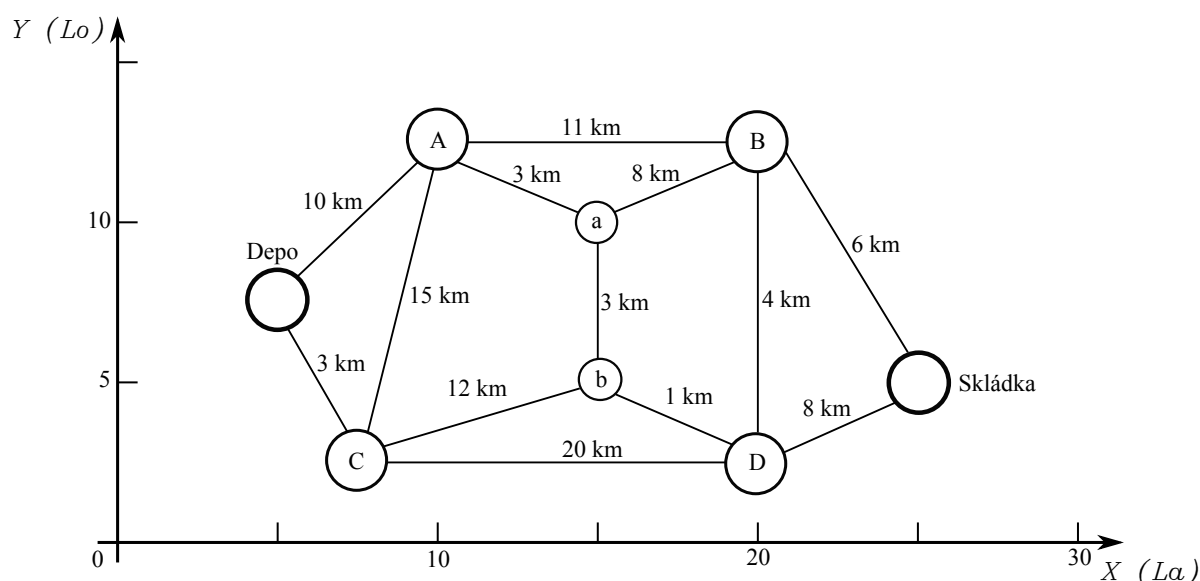
Zdroj: Vlastní zpracování podle [Janáček, s.17].

Reálná dopravní síť reprezentovaná na obrázku 3.1 je tvořena množinou vrcholů a hran.

- Vrcholy **Depo** a **Skládka** představují výchozí body. Lze předpokládat že vozidla, která uskutečňují obsluhu budou ve vrcholu Depo začínat a končit svou jízdu, popřípadě začínat svou jízdu ve vrcholu Depo a končit ve vrcholu Skládka.

- Vrcholy **A, B, C, D** představují zákazníky, kteří vyžadují obsluhu.
- Vrcholy **E** a **F** taktéž představují zákazníky, kteří však obsluhu nevyžadují.
- Písmeny **a, b, c** jsou označeny křižovatky.
- Spojnice mezi jednotlivými vrcholy, tedy tak zvané hrany, jsou charakterizovány svou délkou vyjádřenou v kilometrech.

V takto reprezentované dopravní síti lze předpokládat, že nebude nutné přenášet všechny elementy z uvedené dopravní sítě do nově vytvořeného modelu dopravní sítě. Je možné vyřadit zákazníky E a F, kteří nechtějí být obslouženi z daného depa. Vyřazením zákazníků, kteří nevyžadují obsluhu, je možné taktéž odstranit k nim vedoucí hrany. Vyřazením zákazníka E je možné navíc odstranit křižovatku označenou písmenem c, neboť již není nutné v nově navržené síti vést k tomuto zákazníkovi cestu. Při tvorbě grafu zjednodušené dopravní sítě nesmí být zapomenuto na vytvoření vrcholů v místech křížení spojovacích komunikací. Graf zjednodušené dopravní sítě, vycházející z reálné dopravní sítě, může mít podobu uvedenou na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2 Zjednodušená dopravní síť.

Zdroj: Vlastní zpracování podle [Janáček, s.18].

V této chvíli je připravena zjednodušená dopravní síť, obsahující důležité informace pro řešení zadaného problému. V nově vytvořeném grafu zjednodušené dopravní sítě zůstala zachována množina zákazníků označených velkými písmeny A, B, C, D. Vrcholy tvořící křižovatky jsou označeny malými písmeny a, b. Vzdálenosti mezi jednotlivými vrcholy jsou nadále vyjádřeny v kilometrech. Vlastnosti vrcholů a hran jsou označovány jako jejich atributy.

Základním atributem vrcholu je jeho identifikační číslo. Doplnujícími atributy vrcholů jsou jejich názvy, které můžou odpovídat například konkrétní adrese a poštovnímu

směrovacímu číslu. Důležitým základním atributem vrcholu je jeho umístění v prostoru. Graf uvedený na obrázku 3.2 je umístěn v souřadnicovém systému vymezeném osami x a y . Symboly La a Lo jsou zkratkami anglických názvů pro zeměpisnou šířku (z anglického *latitude*) a zeměpisnou délku (z anglického *longitude*). Při vytváření modelu dopravní sítě je nutné zohlednit také zakulacení Zeměkoule. Pakliže se reálná dopravní síť nachází v oblasti s rozlohou pouze v jednotkách kilometrů, lze v rámci zjednodušení toto zakřivení zanedbat a GPS souřadnice převést na Kartézské souřadnice v rovině. Tyto údaje se mohou uplatnit, pokud jsou lokality zákazníků definovány prostřednictvím GPS. V následující tabulce jsou zpracovány atributy vrcholů dopravní sítě z obrázku 3.2

Tabulka 3.1 Vrcholy dopravní sítě.

Identifikační číslo	Název	x	y
1	Depo	5	7,5
2	A	10	12,5
3	C	7,5	2,5
4	a	15	10
5	b	15	5
6	B	20	12,5
7	D	20	2,5
8	Skládka	30	5

Zdroj: Vlastní zpracování.

Atributy hran jsou taktéž označeny identifikačním číslem jako v předešlém případě. Vhodnější je označení atributem identifikačního čísla počátečního a koncového vrcholu. Tyto atributy totiž jednoznačně určí danou hranu. Posledním důležitým základním atributem je délka hrany. Existuje celá řada dalších doplňujících atributů, respektujících například silniční omezení vycházející z maximální povolené hmotnosti nebo rozměru vozidla na úseku pozemní komunikace a podobně, těm však nebude věnována pozornost. Základní atributy hran grafu z obrázku 3.2 jsou uvedeny v tabulce 3.2.

Tabulka 3.2 Hrany dopravní sítě.

Id. číslo hrany	Id. číslo poč. vrcholu	Id. číslo konc. vrcholu	Délka hrany [km]
1	1 (Depo)	2 (A)	10
2	1 (Depo)	3 (C)	3
3	2 (A)	3 (C)	15
4	2 (A)	6 (B)	11
5	2 (A)	4 (a)	3
6	6 (B)	4 (a)	8
7	6 (B)	7 (D)	4
8	6 (B)	8 (Skládka)	6
9	3 (C)	5 (b)	12
10	3 (C)	7 (D)	20
11	7 (D)	5 (b)	1
12	7 (D)	8 (Skládka)	8
13	4 (a)	5 (b)	3

Zdroj: Vlastní zpracování.

Zjednodušená dopravní síť je viditelně přehlednější a omezena pouze na nezbytné informace. Tato zjednodušená dopravní síť je znázorněna grafem, pro který je možné vytvořit matici vzdáleností, která bude nezbytná pro další práci. Pro účely zadané práce je nyní potřeba vymezit základní pojmy z oblasti teorie grafů, s nimiž je dále pracováno.

3.1.2 Základní pojmy

Za účelem práce s grafy je nutné definovat základní pojmy v této oblasti, na něž budu postupně v práci odkazováno a jsou nezbytné pro řešení dané problematiky. Definice používané v oblasti teorie grafů jsou obecně používány v řadě odborných publikací, proto zde nebudou citovány jednotlivě, ale pouze souhrnně. Základními teoretickými zdroji jsou publikace autorů Palúcha [7] a Murtyho [1].

Definice 3.1. Graf

Graf je uspořádaná dvojice $G = (V, H)$, kde V je neprázdná konečná množina vrcholů a H je množina neuspořádaných dvojic typu $\{u, v\}$ takových, že $u \in V$, $v \in V$ a $u \neq v$. Prvky množiny V nazýváme vrcholy a prvky množiny H nazýváme hranami grafu G .

Definice 3.2. Digraf

Digraf je uspořádaná dvojice $\vec{G} = (V, H)$, kde V je neprázdná konečná množina a H je množina uspořádaných dvojic typu (u, v) takových, že $u \in V$, $v \in V$ a $u \neq v$. Prvky množiny V nazýváme vrcholy a prvky množiny H nazýváme orientovanými hranami digrafu \vec{G} .

Definice 3.3. Úplný graf

Graf $G = (V, H)$ je úplným grafem, pokud množina H obsahuje všechny možné dvojice typu $\{u, v\}$ kde $u, v \in V$ a $u \neq v$. Úplný graf o n vrcholech je označován symbolem K_n .

Definice 3.4. Úplný digraf

Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je úplným digrafem, pokud množina H obsahuje všechny možné dvojice typu (u, v) , kde $u, v \in V$ a $u \neq v$.

Definice 3.5. Hranově ohodnocený graf (digraf)

Graf $G = (V, H)$, respektive digraf $\vec{G} = (V, H)$ je hranově ohodnoceným, pokud každé hraně, respektive orientované hraně $h \in H$ je přiřazeno reálné číslo $c(h)$ nazývané cena hrany h nebo také ohodnocení hrany h . Hranově ohodnocený graf je tedy reprezentován uspořádanou trojicí $G = (V, H, c)$, kde V je množina vrcholů, H množina hran a $c : H \rightarrow R$ je reálná funkce definovaná na množině H .

Definice 3.6. Vrcholově ohodnocený graf (digraf)

Vrcholově ohodnocený graf $G = (V, H)$, respektive digraf $\vec{G} = (V, H)$, je reprezentován uspořádanou trojicí $G = (V, H, d)$, kde V je množina vrcholů, H množina hran a $d : V \rightarrow R$ je reálná funkce definovaná na množině V . Číslo $d(v)$ je pak ohodnocením vrcholu v , nebo také cenou vrcholu v .

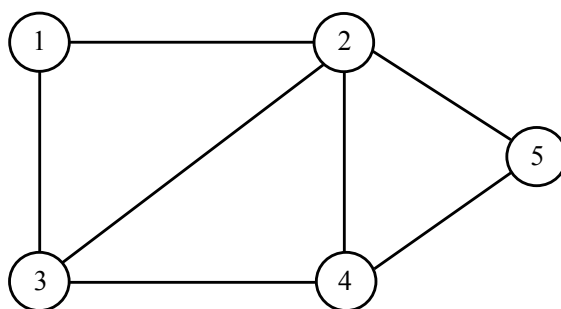
Po zformulování základních pojmů, které lze z hlediska tématu práce považovat za stěžejní, následuje část, která se zabývá reprezentací grafů.

3.2 Reprezentace grafů

Grafy lze reprezentovat vícero způsoby. Pro práci s grafy je tedy výhodné vybrat vhodný způsob reprezentace grafů. Pro některé typy úloh je vhodné graf znázornit vizuálně. Pro úlohy, které vyžadují počítačové zpracování je vhodnější graf znázornit množinovým zápisem. Jednotlivé možnosti reprezentace grafů budou přiblíženy v následující části práce.

3.2.1 Diagram grafu

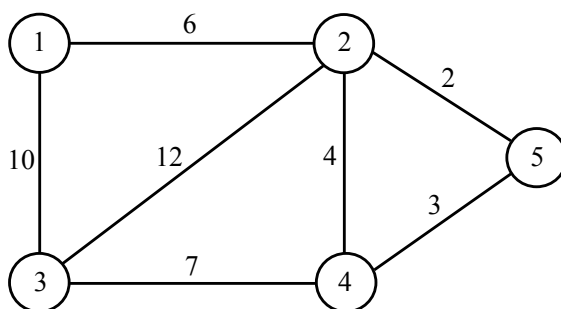
První možný způsob vizuálního zpracování grafu je diagram grafu, respektive digrafu. Diagram grafu je grafické znázornění struktury grafu, tvořené množinou vrcholů a množinou hran. Příklad možného zápisu reprezentace grafu, prostřednictvím jeho diagramu, je znázorněn na obrázku 3.3.



Obrázek 3.3 Diagram grafu $G_1 = (V_1, H_1)$.

Zdroj: Vlastní zpracování.

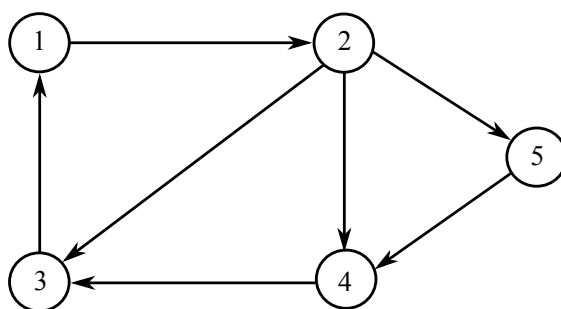
Tento jednoduchý graf zachycený na obrázku 3.3 je sestaven z pěti vrcholů a sedmi hran. Pakliže budou přidány k hranám ohodnocení, vznikne hranově ohodnocený graf, který je vyobrazen na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4 Diagram hranově ohodnoceného grafu $G_2 = (V_2, H_2, c_2)$.

Zdroj: Vlastní zpracování.

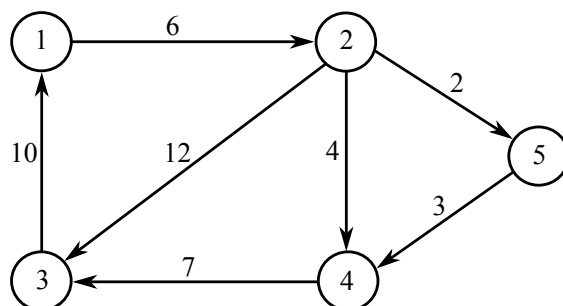
Stejným způsobem lze představit také diagramy digrafu. Na obrázku 3.5 je zobrazen diagram jednoduchého digrafu.



Obrázek 3.5 Diagram digrafu $\vec{G}_3 = (V_3, H_3)$.

Zdroj: Vlastní zpracování.

Po přidání ohodnocení hran digrafu, vznikne hranově ohodnocený digraf zachycený na obrázku 3.6.



Obrázek 3.6 Diagram hranově ohodnoceného digrafu $\vec{G}_4 = (V_4, H_4, c_4)$.

Zdroj: Vlastní zpracování.

Všechny uvedené obrázky představují základní způsoby reprezentace grafů a digrafů, skrze jejich diagramy. V průběhu práce bude na tyto obrázky odkazováno.

3.2.2 Množinový zápis grafu

Další možný způsob reprezentace grafu je množinový zápis. Tento způsob matematického zápisu grafu je výhodný především pro počítačové zpracování. Graf $G_1 = (V_1, H_1)$ je jednoznačně určen množinami V_1 a H_1 , kde $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $H_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$. Digraf lze taktéž jednoznačně definovat množinovým zápisem, podobně jako v předešlém případě $\vec{G}_3 = (V_3, H_3)$, který je určen množinami V_3 a H_3 , kde jsou množiny zapsány ve tvaru $V_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $H_3 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (4, 3), (5, 4)\}$.

3.2.3 Matice přilehlosti

Další možnost reprezentace grafu, respektive digrafu je prostřednictvím tabulkového zápisu. Pro tabulkové zápisy existuje několik variant. První z variant, o které bude blíže pojednáno, je označována jako matice přilehlosti. Maticí přilehlosti je označována čtvercová matice typu $n \times n$, kde $n = |V|$ je počet vrcholů grafu, respektive digrafu. Matice je označována jako $M = (m_{ij})$ a její prvky jsou definovány následovně:

- pro případ grafu

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \{i, j\} \in H \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

- pro případ digrafu

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (i, j) \in H \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

V následujících tabulkách jsou zachyceny matice přilehlosti grafu a digrafu. Jako první je uvedena matice přilehlosti grafu G_1 v tabulce 3.3. Tato matice přilehlosti odpovídá diagramu grafu z obrázku 3.3.

Tabulka 3.3 Matice přilehlosti grafu G_1 .

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	1	0	1	1	1
3	1	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	0	1	0	1	0

Zdroj: Vlastní zpracování.

Následující tabulka 3.4 odpovídá maticovému zápisu přilehlosti digrafu \vec{G}_3 z diagramu uvedeném na obrázku 3.5.

Tabulka 3.4 Matice přilehlosti digrafu \vec{G}_3 .

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	1	1
3	1	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0

Zdroj: Vlastní zpracování.

Z uvedené tabulky 3.3 vyplývá, že matice přilehlosti grafu je vždy symetrická. Totéž však nemusí platit pro digraf, neboť v tabulce 3.4 je viditelné, že matice přilehlosti digrafu není symetrická podle hlavní diagonály.

3.2.4 Matice ohodnocení hran

U hranově ohodnocených grafů a digrafů je možné zapsat matici M ohodnocení hran grafu. Matice je taktéž, jako v předešlém případě typu $n \times n$, kde $n = |V|$ je počet vrcholů grafu, respektive digrafu a prvky v ní jsou definovány:

- pro případ grafu

$$m_{ij} = \begin{cases} c(\{i, j\}) & \text{pokud } \{i, j\} \in H \\ \infty & \text{jinak,} \end{cases}$$

- pro případ digrafu

$$m_{ij} = \begin{cases} c((i, j)) & \text{pokud } (i, j) \in H \\ \infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro takto definované případy jsou v následujících tabulkách uvedeny matice ohodnocení hran. Tabulka 3.5 koresponduje s grafem G_2 který je na obrázku 3.4.

Tabulka 3.5 Matice ohodnocení hran grafu G_2 .

	1	2	3	4	5
1	∞	6	10	∞	∞
2	6	∞	12	4	2
3	10	12	∞	7	∞
4	∞	4	7	∞	3
5	∞	2	∞	3	∞

Zdroj: Vlastní zpracování.

Tabulka 3.6 odpovídá matici ohodnocení hran grafu \vec{G}_4 , reprezentovaném diagramem na obrázku 3.6.

Tabulka 3.6 Matice ohodnocení hran digrafu \vec{G}_4 .

	1	2	3	4	5
1	∞	6	∞	∞	∞
2	∞	∞	12	4	2
3	10	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	7	∞	∞
5	∞	2	∞	∞	∞

Zdroj: Vlastní zpracování.

Podobně jako u matice přilehlosti je pro matici ohodnocení hran společným rysem symetrie obou matic podle hlavní diagonály. Matice ohodnocení hran digrafu však zpravidla symetrická, podle hlavní diagonály, nebývá. Význam těchto výše uvedených maticových zápisů spočívá v zaznamenání existence, respektive neexistence cesty mezi dvěma vrcholy. Tvoří tedy základní vstupní údaje pro cestování v grafech, kterému bude věnována následující podkapitola.

3.3 Cesty v grafech

Jak již bylo dříve zmíněno, grafy nám reprezentují reálné dopravní sítě, ve kterých je možné modelovat pohyb dopravních prostředků. K definování tohoto problému, tedy pohybu v dopravních sítích, zavádí teorie grafů pojem cestování v grafech. I v tomto případě budou na úvod definovány základní pojmy, které jsou s cestováním v grafech úzce spojeny.

Mezi základní pojmy patří sled, tah a cesta.

Definice 3.7. Sled

Sled v grafu $G = (V, H)$ je libovolná střídavá posloupnost vrcholů a hran, ve tvaru

$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, \{v_1, v_2\}, v_2\{v_2, v_3\}, v_3, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, v_k).$$

Definice 3.8. Tah

Tah v grafu G je takový sled v grafu G , ve kterém se neopakuje žádná hrana.

Definice 3.9. Cesta

Cesta v grafu G je takový sled v grafu G , ve kterém se neopakuje žádný vrchol.

Trojice uvedených pojmů - sled, tah a cesta lze po úpravě aplikovat taktéž na digrafy následujícím způsobem.

Definice 3.10. Orientovaný sled

Orientovaný sled v digrafu $\vec{G} = (V, H)$ je libovolná střídavá posloupnost vrcholů a hran ve tvaru

$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, (v_1, v_2), v_2(v_2, v_3), v_3, \dots, (v_{k-1}, v_k), v_k).$$

Definice 3.11. Orientovaný tah

Orientovaný tah v digrafu $\vec{G} = (V, H)$ je orientovaný sled, ve kterém se neopakuje žádná hrana.

Definice 3.12. Orientovaná cesta

Orientovaná cesta v digrafu \vec{G} je takový orientovaný sled, ve kterém se neopakuje žádný vrchol.

Orientované hrany v grafech plní při modelování reálných dopravních sítí především úlohu jednosměrných komunikací, respektive reprezentují cestu průjezdnou pouze v jednom směru.

3.3.1 Výpočet vzdáleností v dopravní síti

Jedním z optimalizačních kritérií počítaných v dopravních úlohách je celková ujetá vzdálenost obslužného vozidla. Cílem tohoto optimalizačního kritéria je tuto celkovou vzdálenost minimalizovat. Pro práci se vzdálenostmi v grafech při optimalizačních výpočtech je nutné definovat několik skutečností, které se vzdálenostmi v dopravních sítích souvisí.

Definice 3.13. Vzdálenost v grafu (digrafu)

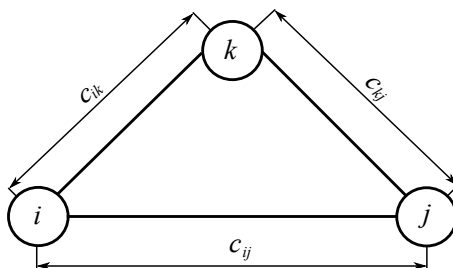
Vzdálenost mezi dvěma vrcholy $u, v \in V$ v hranově ohodnoceném grafu $G = (V, H, c)$, respektive hranově ohodnoceném digrafu $\vec{G} = (V, H, c)$ je $u-v$ cesta, respektive orientovaná $u-v$ cesta $\mu(u, v)$ s minimální délkou.

Platí, že délka $d(\mu(u, v))$ cesty $\mu(u, v)$ je dána součtem ohodnocení hran ležících na této cestě. Tedy:

$$d(\mu(u, v)) = \sum_{h \in \mu(u, v)} c(h) \quad (3.1)$$

Při optimalizačním výpočtu je vhodné zvolit takovou reprezentaci grafu, která obsahuje údaje o vzdálenostech mezi jednotlivými vrcholy. V tomto případě je pro práci s množinou vrcholů vhodné zvolit matici vzdáleností.

Výpočet matice vzdáleností lze provést celou řadou algoritmů. Blíže však bude představen pouze jeden ze základních algoritmů - Floydův algoritmus. Tento algoritmus je určen pro výpočet matice vzdáleností v hranově ohodnocených grafech a digrafech $G = (V, H, c)$ a $\vec{G} = (V, H, c)$, kde $c(h) \geq 0$. Postup výpočtu v algoritmu spočívá v postupném srovnávání hodnot přímých a nepřímých vzdáleností mezi všemi dvojicemi vrcholů $u, v \in V$.



Obrázek 3.7 Zobrazení přímé a nepřímé vzdálenosti mezi vrcholy i a j .

Zdroj: Vlastní zpracování.

Na obrázku je schematicky zakreslen jednoduchý graf, ve kterém je viditelná přímá cesta mezi vrcholy i a j a nepřímá cesta vedoucí přes vrchol k . Řešený příklad pro výpočet vzdálenosti v grafu s využitím Floydova algoritmu je podrobně popsán v mé bakalářské práci [8].

V této chvíli byla popsána první teoretická část zaměřena na teorii grafů. Následující kapitola je věnována matematickému programování. V této části budou definovány základní pojmy z této oblasti a také zde bude popsán teoretický základ matematického modelování.

3.4 Matematické programování

Druhým z již zmíněných teoretických východisek, potřebných pro řešení dané problematiky je matematické programování. Jedná se o rozsáhlou oblast operačního výzkumu¹, jejíž základní část tvoří matematické modely. Úvodní část této kapitoly bude proto zaměřena na matematické modelování, ze kterého bude v následujících částech práce vycházeno.

Obecně se matematické modelování zabývá tvorbou matematických modelů a jejich řešením. Řešení matematických modelů lze rozdělit do dvou základních kategorií. První kategorie je tvořena metodami exaktními, které zaručují nalezení optimálního řešení. Nalezení optimálního řešení je však výpočetně náročnější, a v případě rozsáhlých úloh zde hraje i zásadní roli výpočetní čas. Druhou kategorií proto tvoří metody heuristické (přibližné), které nalezení optimálního řešení nezaručí, ale je možné s jejich pomocí nalézt řešení přípustné. Přípustné řešení je takové řešení, které vyhovuje omezujícím podmínkám [3].

Matematické modely jsou podle určitých kritérií klasifikovány do několika skupin. První kritérium rozlišuje, zdali jsou v modelu obsaženy náhodné proměnné.

- Pakliže model náhodné proměnné neobsahuje, jedná se o deterministický model.
- Pokud v modelu vystupují náhodné proměnné, je tento model označován jako stochastický.

Dalším hlediskem, podle kterého lze rozlišit matematický model, je začlenění faktoru času.

- Statické modely faktor času nezahrnují.
- Dynamické modely faktor času zohledňují.

Posledním ze základních klasifikačních hledisek, které je vhodné zmínit, je matematický popis modelu. Podle tohoto kritéria jsou matematické modely rozděleny na lineární a nelineární modely.

- Lineární modely jsou vyjádřeny ve všech svých částech pouze lineárními funkcemi.
- V případě nelineárních modelů obsahují některé části modelu nelineární funkce.

V rámci řešení zadané problematiky bude využíváno lineárních modelů, respektive lineárního programování [5].

¹Operační výzkum - soubor postupů aplikující matematické metody pro řešení úloh zejména dopravních, ekonomických, logistických, vojenských a podobně. Podrobněji o operačním výzkumu v mé bakalářské práci [8].

3.4.1 Struktura matematického modelu

Struktura matematického modelu bude nyní aplikována na názorném příkladu. Jedná se o obecný matematický model aplikovaný na vybranou dopravní problematiku, jejímž cílem je přiřadit zákazníky ke zdrojům (skladům), podle určitého kritéria. Tímto kritériem, bude pro tento případ, celková vzdálenost, kterou je cíleno minimalizovat.

Každý matematický model je tvořen konstantami a proměnnými. Konstanty vyjadřují vstupy do úlohy. Jedná se o kapacity zdrojů, matice vzdáleností, a podobně. V uvedeném příkladu jsou konstanty reprezentovány maticí vzdáleností d_{ij} . Proměnné x_{ij} poté modelují jednotlivá rozhodnutí. Proměnné mohou nabývat celkem tří definičních oborů. Jedná se o tyto definiční obory:

- celá nezáporná čísla ($x_{ij} \in Z^+$),
- bivalentní proměnná ($x_{ij} \in \{0, 1\}$),
- reálná nezáporná čísla ($x_{ij} \in R^+$).

Bivalentní proměnná často modeluje rozhodnutí typu Ano/Ne. Proměnnou je v tomto modelu veličina x_{ij} , která je bivalentní a rozhoduje o přiřazení, respektive nepř přiřazení zákazníka konkrétnímu skladu. Účelová funkce bude formulována ve tvaru 3.2. Optimalizačním kritériem jsou celkové náklady na obsluhu modelovaného systému. Cílem optimalizace je minimalizovat náklady spojené s obsluhou tohoto systému.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot d_{ij} \quad (3.2)$$

Omezující podmínky 3.3 zajistí, že každému zákazníkovi bude přiřazen právě jeden sklad.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \text{ pro } j = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

Omezující podmínky 3.4 zajistí, že každý sklad bude zásobovat právě jednoho zákazníka.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \text{ pro } i = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

Podmínky 3.5 jsou obligatorními podmínkami, které definují definiční obor proměnných x_{ij} .

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (3.5)$$

Takto připravený model lze po dosazení číselných hodnot za konstanty vyřešit. K řešení tohoto modelu lze zvolit vhodné výpočetní prostředí. V rámci této diplomové práce bude k řešení využíváno výpočetního prostředí Xpress-IVE.

3.5 Modelování v Xpress-IVE

Řešení složitějších matematických modelů lze provádět s využitím vhodného výpočetního nástroje. V předešlé části již byla ukázána tvorba samotného matematického modelu a tato část bude věnována hledání jeho přípustného, v ideálním případě optimálního, řešení. Dnes existuje celá řada optimalizačních softwarů schopných řešit matematické modely v prostředí, které umožňuje jednoduchým způsobem zapsat matematický model, pracovat se vstupními údaji v různých formátech a získat výsledky v uživatelsky přijatelné podobě. Vhodným výpočetním prostředím pro řešení zadané problematiky je již zmíněný Xpress-IVE.

Xpress-IVE je produktem americké vývojářské firmy FICO. Toto výpočetní prostředí umožňuje kromě řešících algoritmů také samotný zápis matematických modelů a jejich editaci. K zápisu využívá samostatného programovacího jazyku Mosel. Vše probíhá v grafickém prostředí IVE (Interactiv Visual Enviroment). Předmětem řešení práce není detailní popis výpočetního prostředí, ale je vhodné představit alespoň strukturu zápisu modelu v uvedeném prostředí [6].

3.5.1 Zápis Matematického modelu v Xpress-IVE

Zápis matematického modelu v jazyku Mosel má předem definovaná pravidla a strukturu.

- **Začátek a konec modelu, název a obecné nastavení**

Prostor, ve kterém je zapsán matematický model, je vymezen začátkem a koncem modelu. Každý matematický model v jazyku Mosel začíná slovem **model** a končí příkazem **end-model**. V tomto prostoru jsou definovány všechny příkazy matematického modelu.

- **Deklarace konstant a proměnných**

V této části jsou zapsány všechny proměnné a konstanty, které v uvedeném modelu vystupují. Podobně, jako v předešlém případě, je prostor pro zápis deklarací vymezen začátkem **declaration** a koncem **end-declaration**.

- **Inicializace vstupních dat**

V této části jsou načteny vstupní hodnoty (data) a to sice vložením přímo do výpočetního prostředí nebo formou odkazu na soubor vhodného formátu, který tyto hodnoty obsahuje. Inicializace v modelu začíná příkazem **initializations from** a končí příkazem **end-initializations**.

- **Účelová funkce, omezující podmínky**

Nyní jsou již definovány všechny objekty, které v modelu vystupují. Tato část je věnována zápisu účelové funkce, strukturálních podmínek a obligatorních podmínek. Výhodou jazyka Mosel je určitá podobnost zápisu v matematickém tvaru.

- **Příkaz optimalizace**

Zpravidla je využíváno dvou příkazů a to sice **minimize**, pakliže je cílem optimalizace minimalizovat hodnoty účelové funkce a příkaz **maximize**, jeli cílem hodnoty účelové funkce maximalizovat.

- **Výpis výstupů**

Před ukončením modelu je možné zadat příkaz pro zápis výsledných hodnot v požadovaném grafickém tvaru. Tento příkaz ale není povinný. Nutné je pouze model ukončit příkazem `end-model`. V této chvíli je možné zkontrolovat správnost syntaxe a provést spuštění výpočtu [6].

Způsob zápisu všech matematických modelů v programu Xpress-IVE má obdobný postup. V této chvíli jsou známy všechny potřebné pojmy z obou oblastí teoretických východisek a v následujících částech práce bude již řešena problematika samotného plánování okružních jízd.

Kapitola 4

Cluster-First Route-Second

Tato kapitola se zabývá metodou primárního shlukování, která bude aplikována k řešení zadané problematiky předložené diplomové práce. Úvodní část této kapitoly je zaměřena na formulaci zadaného problému. Následně bude uveden modelový příklad, na kterém budou představeny možné výpočetní postupy.

4.1 Formulace problému

Dopravní síť je zadána grafem se třemi atributy $N(V, H, l)$. Prvním z atributů je množina vrcholů označena $V = 1, \dots, m$, množina hran je označena $H = 1, \dots, n$ a posledním z atributů je ohodnocení hran označené jako l_{ij} , kde $i, j \in V$ a reprezentuje délku pozemní komunikace v kilometrech. Výchozím bodem je depo $\{d\}$, situované v prvním vrcholu grafu. V tomto vrcholu jsou taktéž soustředěna všechna obslužná vozidla r_k , kde $k \in R$ a $R = 1, \dots, p$ představuje množinu obslužných vozidel s jednotnou kapacitou C . Zákazníci se nacházejí ve vrcholech z_j , kde $j = 2, \dots, m$ a jejich požadavky jsou označeny konstantou b_j . Je předpokládáno, že součet požadavků všech zákazníků je menší nebo roven kapacitě všech obslužných vozidel, tedy [12]:

$$\sum_{j=2}^m b_j \leq C \cdot p \quad (4.1)$$

Cílem úlohy je minimalizovat počet ujetých kilometrů obslužných vozidel r_k při obsluze všech zákazníků z_j vhodným navržením jednotlivých okružních jízd pro všechna obslužná vozidla. Dále musí být splněna podmínka, že každý zákazník z_j je zcela obsloužen jedinou návštěvou obslužného vozidla r_k , přičemž není překročena kapacita C tohoto vozidla a každé z vozidel je použito nejvýše jednou [12].

Řešení tohoto problému, metodou primárního shlukování, je rozděleno do dvou částí. V první části jsou vytvořeny shluky vrcholů S_1, \dots, S_q kde $S_1 \cup \dots \cup S_q \cup \{d\} = V$. V této části je zavedena podmínka, která zajistí, že požadavky zákazníků zařazených do jednotlivých

shluků nepřekročí kapacitu obslužného vozidla:

$$\sum_{j \in S_k} b_j \leq C, \text{ pro } k = 1, \dots, q. \quad (4.2)$$

Druhá část řešení se skládá z úlohy o vyhledání minimální Hamiltonovy kružnice s využitím vhodného přístupu v závislosti na rozsahu řešené úlohy. Obě části budou nyní blíže popsány.

První část je věnována tvorbě jednotlivých shluků (Cluster-First). Tato část (fáze) je realizována prostřednictvím množiny metod, jejichž společným cílem je tvorba shluků podle zadaných kritérií. V předložené diplomové práci bude pozornost zaměřena především na dvě vybrané metody. První z metod, která bude aplikována se nazývá *Sweep algoritmus*. Druhá metoda, kterou lze použít k vytváření shluků, se nazývá *p-medián*. Nyní budou obě uvedené metody blíže definovány.

4.2 Sweep algoritmus (stírací algoritmus)

Sweep algoritmus byl formulován Billy E. Gillemem a E. Millerem již v roce 1974. Jedná se o jeden ze základních přístupů pro vytvoření shluků vrcholů a jeho podrobnému popisu bude věnován následující text [12].

Každý vrchol i z množin vrcholů $V = 1, \dots, m$ je jednoznačně určen dvojicí kartézských souřadnic $[\bar{x}, \bar{y}]$ v rovině. Tyto souřadnice $[\bar{x}, \bar{y}]$ je následně nutné transformovat na nové kartézské souřadnice $[x, y]$ s novým počátečním bodem souřadné soustavy $D[d_1, d_2]$, kde počátek souřadné soustavy D odpovídá depu. Transformace kartézských souřadnic s novým počátkem $D[d_1, d_2]$ je provedena na základě následujících rovnic 4.3 a 4.4:

$$x = \bar{x} - d_1 \quad (4.3)$$

$$y = \bar{y} - d_2 \quad (4.4)$$

Takto upravené kartézské souřadnice $[x, y]$ je dále potřeba transformovat na polární souřadnice $[\varphi, r]$ prostřednictvím rovnic 4.5 a 4.6:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.5)$$

$$\varphi = \arctan(y/x), \quad (4.6)$$

kde pro polární souřadnice φ platí:

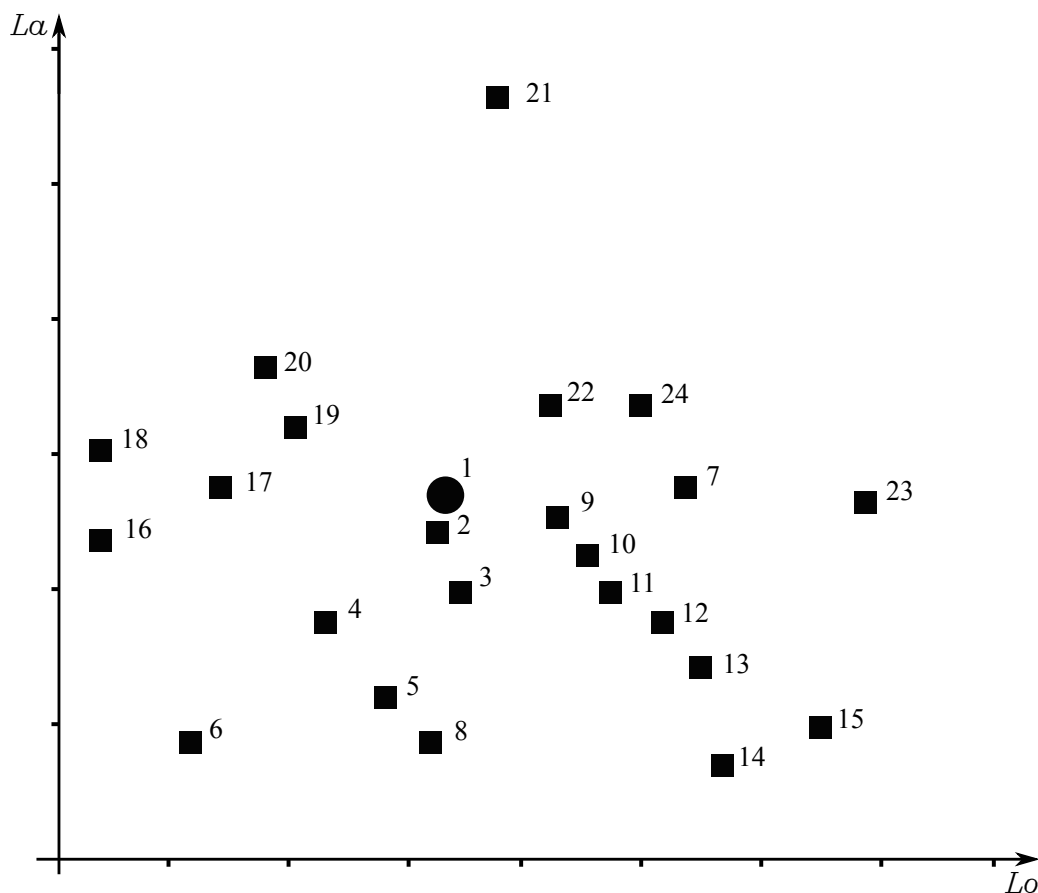
$$\varphi = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{for } x > 0 \quad \wedge \quad y \geq 0, \\ \pi/2 & \text{for } x = 0 \quad \wedge \quad y > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{for } x < 0, \\ 3\pi/2 & \text{for } x = 0 \quad \wedge \quad y < 0, \\ \arctan(y/x) + 2\pi & \text{for } x > 0 \quad \wedge \quad y < 0. \end{cases}$$

Jednotlivé vrcholy se musí následně vzestupně seřadit, vzhledem k pozici odkud bude tvorba shluků zahájena. Tvorba shluků může být zahájena pod jakýmkoliv libovolným úhlem z intervalu $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a nemusí být omezena začátkem kladné části osy x , respektive začínat pod úhlem 0. Shluky vrcholů lze vytvořit, s ohledem na požadovaný výstup a zadané parametry, následovně:

- při zadané kapacitě obslužného vozidla C , kdy jsou vrcholy následně roztříděny do q shluků při splnění podmínky 4.2,
- při zadaném počtu shluků q , v nichž jsou vrcholy rovnoměrně rozděleny bez ohledu na splnění podmínky 4.2.

Výše uvedená problematika bude nyní interpretována na vzorovém příkladu.

Příklad 4.1. Ve 24 vybraných oblastech Moravskoslezského kraje se nacházejí zákazníci s požadavky na obsluhu b_j , kde $j = 2, \dots, 24$. Depo je umístěno ve vrcholu č. 1. Poloha všech zákazníků je jednoznačně určena prostřednictvím jejich GPS souřadnic¹. Rozložení zákazníků v dvojrozměrném prostoru je zachyceno na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1 Poloha jednotlivých obcí.

Zdroj: Vlastní zpracování.

¹Geokódování bylo realizováno s využitím nástroje ArcGIS paní Ing. Lucii Orlíkovou, Ph.D.

Poznámka 4.1. S ohledem na skutečnost, že vzdálenosti mezi vybranými městy jsou vzhledem k poloměru Zeměkoule malé, lze GPS souřadnice považovat za souřadnice kartézské.

Požadavky zákazníků a jejich přesné polohy jsou uvedeny v tabulce 4.1.

Tabulka 4.1 Vstupní údaje pro příklad 4.1.

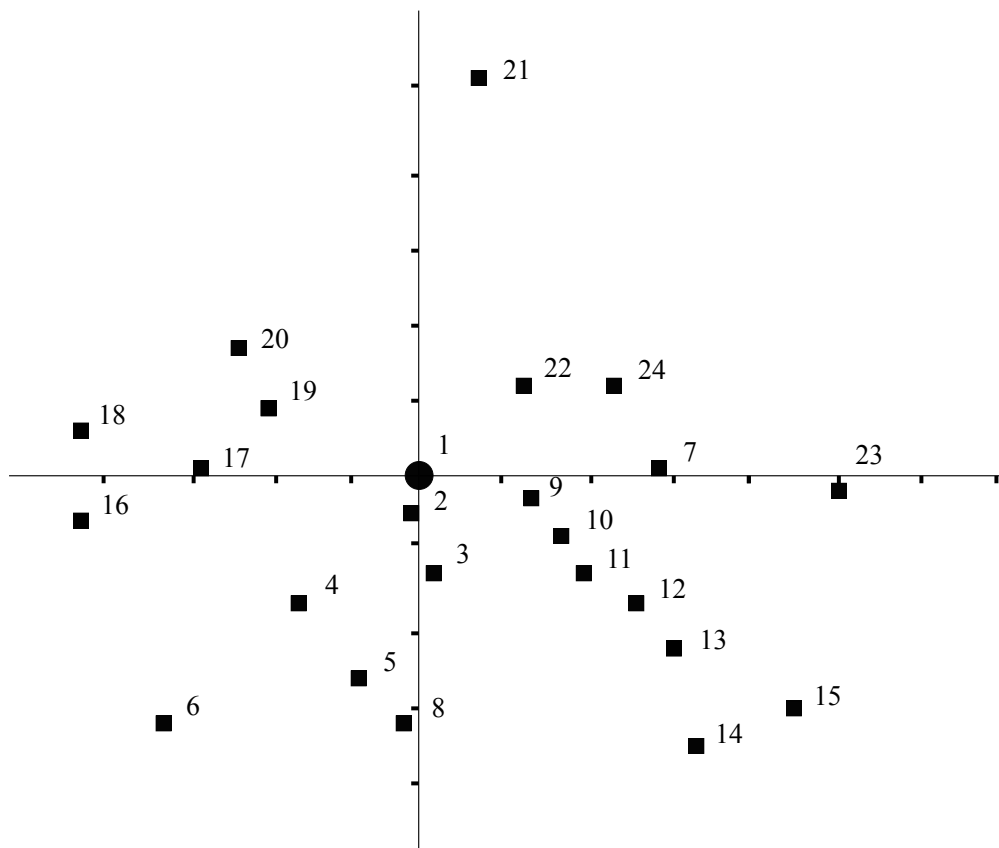
j	Název obce	Latitude	Longitude	b_j
1	Frýdek-Místek	49,6819305	18,3673216	2
2	Staré Město	49,6699188	18,3635041	1
3	Baška	49,6458434	18,3723431	2
4	Palkovice	49,6346702	18,3150854	3
5	Metylovice	49,6066556	18,3391223	3
6	Kozlovice	49,5903943	18,2565719	3
7	Vojkovice	49,6823404	18,468024	1
8	Frýdlant nad Ostravicí	49,5918023	18,3585049	2
9	Dobrá	49,6738269	18,413937	3
10	Nošovice	49,6607252	18,4263363	3
11	Nižní Lhoty	49,6484844	18,4337587	1
12	Vyšní Lhoty	49,6358071	18,4569227	3
13	Raškovice	49,6197452	18,4728742	1
14	Krásná	49,5819885	18,4813851	4
15	Morávka	49,5960692	18,5247241	1
16	Fryčovice	49,6667668	18,2232148	2
17	Staříč	49,6859406	18,2728161	4
18	Brušperk	49,7000957	18,2221047	3
19	Žabeň	49,7087754	18,3042164	4
20	Paskov	49,7317849	18,2903777	2
21	Petřvald	49,8309961	18,3894128	4
22	Bruzovice	49,7169918	18,4096488	1
23	Hnojník	49,6822828	18,5412928	4
24	Lučina	49,7159105	18,4496691	3

Zdroj: Vlastní zpracování.

Cílem úlohy je:

- vytvořit q shluků, za předpokladu, že kapacita vozidla je $C = 12$ jednotek,
- vytvořit 3 shluky, do kterých budou vrcholy (zákazníci) rovnoměrně rozděleni.

Řešení: V prvním kroku je nutné kartézské souřadnice $[\bar{x}, \bar{y}]$ převést na kartézské souřadnice s novým počátkem souřadné soustavy $D[d_1, d_2]$. Situace je zachycena na obrázku 4.2.



Obrázek 4.2 Poloha jednotlivých obcí s počátkem v depu.

Zdroj: Vlastní zpracování.

Následně je proveden výpočet v programu Xpress-IVE na základě stanovených podmínek uvedených v předešlé části. Výsledky jsou prezentovány v tabulce 4.2. Výstupem je posloupnost jednotlivých obcí, která vznikla postupným stíráním vrcholů, přes všechny vrcholy.

Tabulka 4.2 Výstup výpočtu v programu Xpress-IVE pro příklad 4.1.

Úhel φ	ID obce	Název Obce	Požadavek zákazníka b_j
0	1	Frýdek-Místek	2
0,00202505	23	Hnojník	4
0,00407039	7	Vojkovice	1
0,391357	24	Lučina	3
0,691784	22	Bruzovice	1
1,42367	21	Petřvald	4
2,56667	20	Paskov	2
2,73938	19	Žabeň	4
3,01715	18	Brušperk	3
3,09919	17	Staříč	4
3,24643	16	Fryčovice	2
3,83229	6	Kozlovice	3
3,87702	4	Palkovice	3
4,35395	5	Metylovice	3
4,40467	2	Staré Město	1
4,61488	8	Frýdlant nad Ostravicí	2
4,85065	3	Baška	2
5,56368	14	Krásná	4
5,75079	13	Raškovice	1
5,78381	15	Morávka	1
5,8078	12	Vyšní Lhoty	3
5,8168	11	Nižní Lhoty	1
5,93823	10	Nošovice	3
6,11107	9	Dobrá	3

Zdroj: Vlastní zpracování.

Z takto připravených dat je možné vytvořit požadované shluky. Postup vytváření jednotlivých shluků spočívá v postupném sčítání požadavků zákazníků b_j do naplnění kapacity obslužného vozidla C . Je-li kapacita obslužného vozidla naplněna, je daný shluk kompletní. Suma jednotlivých požadavků zákazníku musí být menší, než je kapacita vozidla. Jedná se o situaci, ve které by přičtením dalšího zákazníka v pořadí, došlo k překročení kapacity obslužného vozidla. Předpokládaná kapacita obslužného vozidla bude odpovídat zvolené hodnotě $C = 12$ jednotek. Poté mohou mít jednotlivé shluky podobu uvedenou v tabulce 4.3.

Tabulka 4.3 Tvorba shluků Sweep algoritmem v příkladu 4.1.

Množina shluků	ID obce	Název Obce	Požadavek zákazníka b_j
Shluk 1	1	Frýdek-Místek	2
	23	Hnojník	4
	7	Vojkovice	1
	24	Lučina	3
	22	Bruzovice	1
			$\sum_{j=1}^5 = 11$
Shluk 2	21	Petřvald	4
	20	Paskov	2
	19	Žabeň	4
			$\sum_{j=6}^8 = 10$
Shluk 3	18	Brušperk	3
	17	Staříč	4
	16	Fryčovice	2
	6	Kozlovice	3
			$\sum_{j=9}^{12} = 12$
Shluk 4	4	Palkovice	3
	5	Metylovice	3
	2	Staré Město	1
	8	Frýdlant nad Ostravicí	2
	3	Baška	2
			$\sum_{j=13}^{17} = 11$
Shluk 5	14	Krásná	4
	13	Raškovice	1
	15	Morávka	1
	12	Vyšní Lhoty	3
	11	Nižní Lhoty	1
			$\sum_{j=18}^{22} = 10$
Shluk 6	10	Nošovice	3
	9	Dobrá	3
			$\sum_{j=23}^{24} = 6$

Zdroj: Vlastní zpracování.

Každý shluk je definován identifikačními čísly a názvy obcí, které k konkrétnímu shluku náleží. V uvedené tabulce 4.3 byl zvolen přístup, kdy z předem známe kapacity obslužného vozidla byla vytvořena množina q shluků. Jiným přístupem, který řeší zadanou problematiku je p-medián.

4.3 P-medián

Další ze základních algoritmů matematického programování, který lze využít pro tvorbu shluků je p-medián. Tento vybraný přístup náleží do oblasti lokačně-alokačních úloh. Před podrobným představením matematického modelu p-mediánu, je nutné zohlednit několik skutečností.

- Množina zákazníků J odpovídá množině vrcholů V , která již neobsahuje vrchol, ve kterém je umístěno depo $\{d\}$. Musí tedy platit rovnost $J = V - \{d\}$.
- Množina možných umístění středisek I je totožná s množinou zákazníků J .
- Počet umísťovaných středisek p odpovídá počtu vytvořených shluků, přičemž kapacita K odpovídá celkovému součtu požadavků všech zákazníků, přiřazených jednotlivým shlukům S_1, \dots, S_p a platí tedy rovnost $C = K$, kde C je kapacita všech obslužných vozidel.

Splněním těchto požadavků je možné přistoupit k další části a tou je samotný matematický model úlohy o p-mediánu. Účelová funkce má v uvedeném matematickém modelu tvar 4.7. Tato účelová funkce reprezentuje celkovou vzdálenost mezi zákazníky a středisky, ke kterým byli přiřazeni [13].

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot d_{ij} \quad (4.7)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \text{ pro } j = 1, \dots, n \quad (4.8)$$

$$x_{ij} \leq y_i, \text{ pro } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \quad (4.9)$$

$$\sum_{i=1}^m y_i \leq p \quad (4.10)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot b_j \leq K, \text{ pro } i = 1, \dots, m \quad (4.11)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \text{ pro } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \quad (4.12)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \text{ pro } i = 1, \dots, m. \quad (4.13)$$

Proměnná x_{ij} vystupující v modelu je bivalentní proměnnou, která reprezentuje přiřazení, respektive nepř přiřazení zákazníka j lokalitě i . Vzdálenosti mezi lokalitou pro umístění střediska i a zákazníkem j jsou reprezentovány maticí vzdáleností d_{ij} .

V modelu dále vystupují omezující podmínky. Omezující podmínky 4.8 zajistí, že každý zákazník bude přiřazen právě jedné lokalitě. Podmínky 4.9 zabezpečí, že zákazník bude vždy přiřazen pouze lokalitě, ve které bude situováno středisko. Pro tyto podmínky je zavedená nová bivalentní proměnná y_i , která rozhoduje o umístění, respektive neumístění střediska v lokalitě i . Podmínka 4.10 zabezpečí, že bude umístěno nejvýše p středisek. Podmínky 4.11 zajistí, že součet požadavků zákazníků přiřazených jednomu středisku

nepřekročí zadanou kapacitu K . Zbylou část modelu tvoří obligatorní podmínky 4.12 a 4.13, definující definiční obory proměnných x_{ij} a y_i .

Optimalizačním kritériem je v tomto modelu celková vzdálenost mezi zákazníky a přiřazenými středisky. Cílem optimalizace je tuto vzdálenost minimalizovat [13].

Řešení: Při řešení příkladu 4.1, uvedeného v předešlé podkapitole, bude vycházeno z podobného zadání. Zadání je rozšířeno pouze o matici vzdáleností d_{ij} . Tato matice reprezentuje vzdálenosti mezi jednotlivými vrcholy (zákazníky). Výsledný výpočet zohledňuje skutečné vzdálenosti (délky komunikací) spojující jednotlivé zákazníky. Vytvořené shluky jsou tedy tvořeny vrcholy, mezi kterými jsou vzdálenosti minimální.

Řešení matematického modelu p-mediánu bylo provedeno v prostředí Xpress-IVE a výsledky jsou uvedeny v následujících tabulkách. V tabulce 4.4 jsou uvedeny střediska celkem šesti vytvořených shluků.

Tabulka 4.4 Tvorba shluků s využitím p-mediánu v příkladu 4.1.

Množina shluků	Id. obce	Název Obce	Požadavek zákazníka b_j
Shluk 1	1	Frýdek-Místek	2
	2	Staré Město (středisko)	1
	3	Baška	2
	9	Dobrá	3
	19	Žabeň	4
			$\sum_{j=1}^5 = 12$
Shluk 2	4	Palkovice	3
	5	Metylovice (středisko)	3
	6	Kozlovice	3
	8	Frýdlant nad Ostravicí	2
			$\sum_{j=6}^9 = 11$
Shluk 3	7	Vojkovice (středisko)	1
	10	Nošovice	3
	22	Bruzovice	1
	23	Hnojník	4
	24	Lučina	3
			$\sum_{j=10}^{14} = 12$
Shluk 4	11	Nižní Lhoty	1
	12	Vyšní Lhoty	3
	13	Raškovice (středisko)	1
	14	Krásná	4
	15	Morávka	1
			$\sum_{j=15}^{19} = 10$
Shluk 5	16	Fryčovice	2
	17	Staříč (středisko)	4
	18	Brušperk	3
	20	Paskov	2
			$\sum_{j=20}^{23} = 11$
Shluk 6	21	Petřvald (středisko)	4
			$\sum_{j=24}^{24} = 4$

Zdroj: Vlastní zpracování.

V této chvíli jsou vytvořeny shluky, ve kterých jsou rozmístěni zákazníci. Všechny shluky splňují požadavky na obsluhu tak, aby byla zajištěna kapacitní podmínka. Nyní je možné pro každý shluk naplánovat okružní jízdu obslužného vozidla. Úloha okružních jízd je úlohou o nalezení minimální Hamiltonovy kružnice. Minimální Hamiltonova kružnice je taková Hamiltonova kružnice, která má minimální součet ohodnocení hran do ní zařazených ze všech možných Hamiltonových kružnic. Výsledné srovnání nalezených Hamiltonových kružnic, pro obě varianty řešení, je uvedeno v tabulce 4.5.

Tabulka 4.5 Srovnání výsledků Hamiltonovy kružnice pro Sweep algoritmus a p-medián v příkladu 4.1.

Shluk	Sweep algoritmus	P-medián
Shluk 1	34,076	27,727
Shluk 2	45,279	37,113
Shluk 3	44,556	36,406
Shluk 4	27,121	42,021
Shluk 5	42,021	36,009
Shluk 6	12,020	38,840
Celková hodnota	205,073 km	218,116 km

Zdroj: Vlastní zpracování.

V příkladu 4.1 byla pro nalezení Hamiltonovy kružnice použita algoritmická metoda, zajišťující nalezení optimálního řešení. Nevýhodou této metody je složitost výpočtu a jeho omezenější využití pro úlohy s větším rozsahem. Proto budou nyní představeny některé heuristické metody, které sice nezaručí nalezení optimálního řešení, ale jsou výpočetně méně náročné, a lze s nimi získat přípustné řešení v kratším čase.

4.4 Heuristické metody

Heuristické metody, zkráceně jen heuristiky, jsou takové metody, které nezaručí nalezení optimálního řešení, jak již bylo avizováno v minulé kapitole. Obecně je heuristická metoda charakterizována přechodem od jednoho přípustného řešení k následujícímu a lokálním kritériem, s jehož pomocí je z množiny možných řešení vybíráno výsledné. Heuristiky lze v lineárním programování rozdělit na:

- heuristiky primární,
- heuristiky duální.

Primární heuristikou je označován postup, který začíná přípustným řešením a přechází vždy jen k řešení, které je také přípustné, a jehož hodnota lokálního kritéria je menší než hodnota lokálního kritéria z předchozího řešení. Lokální kritérium je obvykle shodné s hodnotou původní účelové funkce. Duální heuristika oproti primární začíná nepřípustným řešením a postupně přechází k řešení s menší mírou nepřípustnosti tak, aby se hodnota lokálního kritéria zvýšila co nejméně.

Oba dva typy procesů končí ve chvíli, kdy ze současného řešení není možné přejít povoleným postupem k řešení s menší hodnotou lokálního kritéria nebo menší mírou nepřípustnosti. Tyto postupy lze při využití heuristických metod na konkrétních úlohách kombinovat, například tak, že duální heuristikou je nalezeno výchozí přípustné řešení pro primární heuristiku, která toto řešení dále zlepšuje [4].

Konkrétní typy heuristických metod, které lze použít pro řešení zadané problematiky, jsou vysvětleny v následující části práce. Jednou z těchto metod je **vkładací heuristika**. Tato heuristika využívá toho, že řešení úlohy je určeno výběrem některých objektů z předem určené množiny dosud nezařazených objektů. Jedná se například o dosud nenavštívené uzly dopravní sítě. Postup této heuristiky spočívá ve vkládání jednoho z nezařazených objektů do výchozího řešení tak, aby se zmenšila hodnota účelové funkce v primární heuristice, nebo se zmenšila míra nepřipustnosti v heuristice duální. Jednou z možných variant je duální vkládací heuristika známá pod názvem metoda nejbližšího, dosud nenavštíveného vrcholu, která bude později blíže představena [4].

Alternativním přístupem k heuristice vkládací může být **výměnná heuristika**. Princip této metody spočívá v rozdělení objektů úlohy do dvou disjunktních množin². Jedná se o množiny objektů tvořící současné řešení a množiny nezařazených objektů [4].

Postup heuristiky spočívá v tom, že určitá podmnožina objektů je vyjmuta ze současného řešení a nahrazena podmnožinou objektů z množiny nezařazených objektů. Vyjmuté objekty jsou zařazeny zpět do množiny nezařazených objektů. Lokálním kritériem, podle něhož je posouzena kvalita dosaženého řešení, je například hodnota účelové funkce současného řešení [4].

Obě varianty, tedy vkládací a výměnné heuristiky, budou blíže popsány. První z nich je již zmíněná metoda nejbližšího, dosud nenavštíveného vrcholu.

4.5 Metoda nejbližšího, dosud nenavštíveného vrcholu

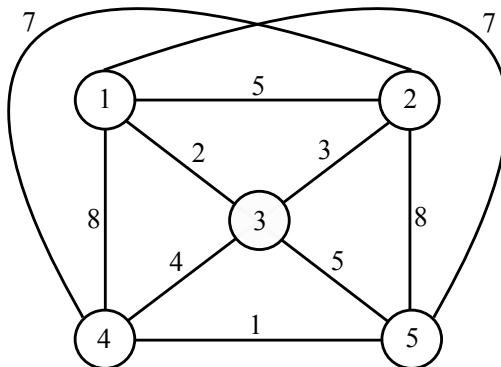
První z těchto heuristických metod, kterou lze použít pro nalezení Hamiltonovy kružnice je metoda nejbližšího, dosud nenavštíveného vrcholu. Jak již bylo zmíněno v předešlé části práce, tato metoda nezaručí nalezení minimální Hamiltonovy kružnice. Metoda nejbližšího, dosud nenavštíveného vrcholu, pracuje s úplným grafem. Algoritmus této metody je složen ze čtyř, níže uvedených kroků [2].

1. Konstrukce algoritmu je zahájena v libovolném vrcholu a jako první je zařazena hrana s minimálním ohodnocením, která sousedí s tímto vrcholem.
2. Je-li vybráno $n - 1$ hran, kde n je počet vrcholů, následuje postup na krok 4. V opačném případě je postoupeno na krok 3.
3. Jako další je vybrána hrana s minimálním ohodnocením, která spojuje naposledy navštívený vrchol s dosud nenavštíveným vrcholem, následuje návrat na krok 2.
4. Hamiltonova kružnice je uzavřena hranou, která spojuje naposledy navštívený vrchol s vrcholem, ve kterém byla konstrukce algoritmu zahájena.

Tento algoritmus bude pro názornost předveden na vzorovém příkladu.

²Disjunktní množiny - množiny, jejichž průnikem je množina prázdná, respektive nemají žádný společný prvek.

Příklad 4.2. Úkolem je v zadaném grafu, reprezentovaném na obrázku 4.3, nalézt minimální Hamiltonovu kružnici s využitím metody nejbližšího, dosud nenavštíveného vrcholu.



Obrázek 4.3 Graf pro představení metody nejbližšího, dosud nenavštíveného vrcholu.

Zdroj: Vlastní zpracování.

Řešení: Na uvedeném grafu 4.3 je možné zahájit algoritmus tím, že je zvolen výchozí libovolný vrchol. Vybrán je například vrchol č.1. Nyní bude postoupeno na další vrchol, který s tímto vrcholem sousedí, a má nejnižší ohodnocení hrany. V tomto případě se jedná o vrchol č. 3 s hodnotou ohodnocené hrany 2 km. Tento postup se opakuje, dokud nebude vybráno $n - 1$ hran. Je-li vybráno $n - 1$ hran, algoritmus je ukončen návratem do výchozího vrcholu.

Výsledná posloupnost vrcholů může mít následující podobu: 1-3-2-4-5-1, přičemž součet ohodnocení hran zařazených do výpočtu je roven 20 km. Přestože lze tento algoritmus využít pro řešení rozsáhlejších úloh, není zde zaručeno nalezení optimálního řešení.

Přesnost dosažených výsledků tohoto algoritmu na rozsáhlejších úlohách je možné srovnat s optimálními řešeními těchto úloh. Za tímto účelem budou použita data z online knihovny, která je volně dostupná na webových stránkách [14]. V této knihovně jsou uvedeny symetrické matice vzdáleností, vytvořené na základě reálných měst. Pro každou matici vzdáleností je zde také nalezeno optimální řešení Hamiltonovy kružnice. Tato knihovna je označena zkratkou TSP (z anglického Symetric traveling salesman problem - symetrické úlohy obchodního cestujícího).

Z databáze bylo vybráno 15 náhodných úloh o různém rozsahu. Pro tyto vybrané úlohy bylo provedeno srovnání výpočtů dosažených metodou nejbližšího, dosud nenavštíveného vrcholu s jejich optimálním řešením. Výše uvedený postup metody nejbližšího, dosud nenavštíveného vrcholu byl implementován v prostředí výpočetního programu Xpress-IVE. Dosažené výsledky a optimální řešení těchto úloh jsou uvedeny v tabulce 4.6.

Tabulka 4.6 Srovnání optimálního řešení s výsledky metody nejbližšího, dosud nenavštíveného vrcholu.

Název souboru	Počet měst	Optimální řešení	Vypočtené hodnoty
berlin52	52	7542	8980
bier127	127	118282	135737
ch150	150	6528	8246
d657	657	48912	59963
kroA200	200	29368	35859
lin318	318	42029	54019
pr76	76	108159	153462
pr136	136	96772	120769
pr152	152	73682	85699
pr264	264	49135	58023
pr299	299	48191	59890
pr439	439	107217	131281
rat783	783	8806	11054
rd400	400	15281	19603
u574	574	36905	48549

Zdroj: Vlastní zpracování.

Vypočtené hodnoty metodou nejbližšího, dosud nenavštíveného vrcholu jsou od optimálních řešení vzdálené. Přesněji lze říct, že pro tyto řešené úlohy jsou vypočtené hodnoty pro každý soubor průměrně o 20% vyšší, než je hodnota optimálního řešení. Vhodnějším přístupem pro řešení těchto rozsáhlejších úloh může být Lin–Kernighanova metoda, která bude nyní blíže představena.

4.6 Lin–Kernighanova metoda

Tato metoda se řadí do druhé kategorie zmíněných heuristik, mezi takzvané primární výměnné heuristiky. Slouží pro řešení úlohy obchodního cestujícího na neorientované, úplné síti o n uzlech (vrcholech). Tato heuristika se od běžných výměnných heuristik odlišuje tím, že vyměňuje místo řetězců úseky, které tvořily výchozí trasu, za úseky, které do ní nepatřily. Další odlišnost od běžných heuristik vychází ze speciálního přístupu ve vytváření stromu řešení. Přestože je tato metoda považována za primární heuristiku, výsledkem nemusí být vždy Hamiltonova kružnice, ale jen tah o n úsecích, v němž existuje nejvýše jeden uzel incidentní s třemi úseky tahu [4].

Princip fungování algoritmu je založen na respektování určitých pravidel. Těmito pravidly jsou:

1. Ze současného tahu smí být vylučovány jen ty úseky, které byly součástí výchozího řešení.
2. Do současného tahu smějí být zaváděny jen ty úseky, které nebyly součástí výchozího řešení.
3. Celková výhodnost v_k musí být nezáporná.
4. Vyloučením úseku je zrušen podcyklus.

Pokud není možné dodržet pravidlo č. 1, nebo pravidlo č. 2, při zachování incidentnosti vylučovaných a zaváděných úseků, postup výměny vždy končí. Totéž platí, pokud není možné, při respektování dříve uvedených pravidel, zachovat pravidlo č. 3, postup výměny v tomto případě taktéž vždy končí. Poslední pravidlo č. 4 v základním postupu jednoznačně určuje úsek, který je třeba vyloučit.

V rámci řešené problematiky není nutné blíže popisovat postup algoritmu. Výpočty řešených úloh za pomoci Lin-Kernighanovy metody budou provedeny na online serveru NEOS Concorde [17]. Aby však bylo možné provést výpočet touto metodou, musí být vstupní matice vzdáleností symetrická. Postup transformace nesymetrických matic na symetrické bude nyní blíže představen.

4.6.1 Transformace nesymetrické matice na symetrickou matici dopravní úlohy

Této problematice je věnován výzkum dvou holandských matematiků, kteří přišli s řešením, jak symetrizovat nesymetrické matice vzdáleností. Práce matematiků R. Jonkera a T. Volgenanta byla zveřejněna roku 1983. V jejich práci je popsána tato transformace nesymetrické matice dopravní úlohy obchodního cestujícího na matici symetrickou, za cenu zdvojnásobení prvků této matice [10].

Na tento výzkum navázal Ratnesh Kumar, svou prací z roku 2000, který se na výzkum dříve uvedených autorů odkazuje. V jeho práci je popsán postup jak lze matici symetrizovat [11]. Tento postup bude nyní blíže představen.

Při řešení je vycházeno z nesymetrické matice vzdáleností $D = [d_{ij}]_{n \times n}$ v níž se předpokládá že:

$$-\infty < d_{\min} \leq d_{\max} < \infty. \quad (4.14)$$

Přidáním vhodné konstanty každému vstupu do matice D je možné získat takovou matici vzdáleností D' , kde platí, že $\frac{d'_{\max}}{d'_{\min}} < \frac{4}{3}$. Matice vzdáleností $D' = [d'_{ij}]_{n \times n}$ je definována

následujícím způsobem:

$$\forall i, j : d'_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{když } i = j \\ d_{ij} & \text{když } [4d_{\min} - 3d_{\max}] > 0, \quad i \neq j \\ d_{ij} + [3d_{\max} - 4d_{\min} + \epsilon] & \text{jinak,} \end{cases}$$

přičemž platí, že $\epsilon > 0$ a jedná se o malé kladné číslo. Předpokladem je platnost podmínky 4.14, která platí i pro nově vytvořenou matici:

$$-\infty < d'_{\min} \leq d'_{\max} < \infty. \quad (4.15)$$

Pro každou matici vzdáleností D vyhovující uvedené podmínce 4.14, musí pro nově vytvořenou matici D' platit, že $\frac{d'_{\max}}{d'_{\min}} < \frac{4}{3}$.

Použitím matice vzdáleností D' , která je definována symetrickou maticí vzdáleností a je požadovanou maticí vzdáleností (výsledným řešením) $\bar{D} = [\bar{d}_{ij}]_{2n \times 2n}$ je uvedena níže.

$$\bar{D} := \begin{pmatrix} \infty & (D')^T \\ D' & \infty \end{pmatrix}$$

Pro zachování jednoduché orientace v nově vytvořené matici platí, že pro $i \leq n$ je použito $[i]$ pro označení $i + n$. To znamená, že $[1] = 1 + n$, $[n] = 2n$, a podobně. Prvky i a $[i]$ tvoří kompletní páry vrcholů. Dále pro každé $i \leq n$ je nazýván vrchol i reálným vrcholem a vrchol $[i]$ označován jako fiktivní vrchol. Je vhodné poznamenat pro každé i, j :

$$\bar{d}_{ij} = \bar{d}_{[i][j]} = \infty; \bar{d}_{[i]j} = \bar{d}_{j[i]} = d'_{ij}; \bar{d}_{[i]i} = \bar{d}_{i[i]} = d'_{ii} = 0.$$

Jinými slovy lze říct, že vzdálenost mezi párem reálných nebo fiktivních vrcholů je nekonečno, zatímco vzdálenost mezi reálným a fiktivním vrcholem je konečná a symetrická a na závěr vzdálenost mezi kompletním párem vrcholů je rovna nule [11]. V této chvíli je představen základní postup, který lze použít pro symetrizaci matice a který bude implementován do výpočetního prostředí programu Xpress-IVE.

Kapitola 5

Numerické experimenty na reálných datech

V této fázi práce jsou již známy všechny potřebné teoretický podklady pro řešení zadané úlohy. Byly postupně popsány postupy a algoritmy, které budou nyní aplikovány na reálné úloze. Následující část práce bude zaměřena na popis vstupních dat a jejich zpracování.

5.1 Představení vstupních dat

Jak již bylo dříve avizováno, před zahájením samotných výpočtů je potřebné seznámit se s vstupními daty, ze kterých bude dále vycházeno. Vstupní data byla poskytnuta vedením společnosti Nehlsen Třinec s.r.o., zprostředkující svoz separovaného odpadu v obci Bystřice. Data jsou vedena v samostatném tabulkovém procesoru Microsoft Excel a mají podobu uvedenou v tabulce 5.1 a tabulce 5.2.

Tabulka 5.1 Ukázka vstupních dat (první část).

Id. číslo	Město	Číslo popisné	Kusy	Litry	Kusy*litry
1	Jablunkovská	392	0	0	0
2	Bystřice	416	2	1100	2200
3	Bystřice	292	1	110	110
4	Bystřice	1410	1	110	110
5	Bystřice	826	1	110	110

Zdroj: Vlastní zpracování podle dat poskytnutých společností Nehlsen Třinec, s.r.o.

V tabulce 5.1 je ukázka první části zaznamenaných dat, obsahující identifikační údaje o místech svozu a údaje o objemovém množství odpadu, které připadá na dané místo, respektive kontejner. Významy jednotlivých prvků tabulky budou nyní vysvětleny.

- V prvním sloupci označeném názvem **Id. číslo** jsou uvedeny identifikační čísla jednotlivých svozových míst. Jedná se o atributy přiřazené jednotlivým vrcholům v dopravní síti. V tabulce je uvedeno pouze prvních pět sběrných míst, v celém souboru je jejich počet roven hodnotě 1496.
- Další údaj označený jako **Město** představuje území, na kterém se sběrné místo nachází.
- **Číslo popisné** je vázáno na objekty, u kterých se nacházejí sběrné nádoby, popřípadě jsou tyto nádoby ve vlastnictví daného objektu.
- Hodnoty ve sloupci s názvem **Kusy** vyjadřují počet sběrných nádob různých objemů, nacházejících se na daném svozovém místě.
- Údaj **Litry** je charakteristický pro daný typ nádoby nebo pytle na odpad. Jedná se tedy o objemové vyjádření velikosti příslušného kontejneru nebo jiného sběrného zařízení, například již zmíněného pytle na odpad.
- Sloupec označený jako **Kusy*litry** představuje celkové množství odpadu vyjádřeného v litrech, spadající na jedno sběrné místo. Tato hodnota vyjadřuje celkový požadavek na obsluhu konkrétního sběrného místa a je dána počtem nádob nacházejících se v daném místě, násobena jejich objemem.

V druhé části tabulky jsou uvedeny informace, které již bylo nutné ze získaných dat vytvořit. Tyto informace souvisí s přesnou polohou daných sběrných míst. Lokalizace těchto míst byla uskutečněna s pomocí nástroje ArcGIS paní Ing. Lucií Orlíkovou, Ph.D.

Tabulka 5.2 Ukázka vstupních dat (druhá část).

Obec	Celá adresa	Latitude	Longitude
Třinec	Jablunkovská 392 Třinec	49,6785021	18,6720589
Třinec	Bystřice 416 Třinec	49,6373291	18,7222488
Třinec	Bystřice 292 Třinec	49,6372186	18,7192666
Třinec	Bystřice 1410 Třinec	49,6456448	18,732216
Třinec	Bystřice 826 Třinec	49,6414922	18,7156019

Zdroj: Vlastní zpracování.

Obdobně jako v předešlé tabulce bude nyní představen význam jednotlivých sloupců.

- Sloupec **Obec** uvádí název obce, pod kterou daná oblast spadá a jejíž technické služby svoz odpadu zabezpečují.
- Dále je v souboru uvedena celá adresa každého sběrného místa a zaznamenána ve sloupci se stejným názvem, tedy **Celá adresa**.

- Poslední dva atributy tabulky vyjadřují zeměpisnou šířku **Latitude** a zeměpisnou délku **Longitude**. Tyto údaje jsou klíčové pro přesné lokalizování daných míst a jejich následné geokódování.

Z takto připravených vstupních dat bylo možné vytvořit na základě geokódování, dopravní síť a získat vstupní data v podobě úplné matice vzdáleností typu $n \times n$, o velikosti 1496 x 1496 vrcholů, charakterizující vzdálenosti mezi jednotlivými vrcholy. To vše bylo provedeno, jak již bylo dříve zmíněno, s využitím nástroje ArcGIS s pomocí paní Ing. Lucie Orlíkové, Ph.D.

5.2 Dekompozice úlohy

Z hlediska celkového objemu, který je určený ke svozu a kapacitě obslužného vozidla, bude výsledným řešením množina okružních jízd. K vytvoření shluků v množině okružních jízd bylo použito Sweep algoritmu a p-medián přístupu. Výsledky je možné mezi sebou porovnat. Výpočet Sweep algoritmu byl proveden na základě podmínek uvedených v teoretické části. Výstupem z tohoto algoritmu je množina sběrných míst. Shluky jsou vytvořeny postupným sčítáním požadavků jednotlivých svozových míst do naplnění kapacity obslužného vozidla čítající 27500 litrů, protože kapacita svozového vozidla činí 27500 litrů. Na základě tohoto postupu bylo vytvořeno celkem 9 shluků o kapacitě menší nebo rovné kapacitě obslužného vozidla. Přehled výstupů ze Sweep algoritmu je uveden v tabulce 5.3.

Tabulka 5.3 Shluky vytvořené Sweep algoritmem.

Počet shluků	Počet vrcholů ve shluku	Kapacita shluků [litrů]
Shluk 1	183	27498
Shluk 2	213	27464
Shluk 3	119	27426
Shluk 4	147	25369
Shluk 5	144	27440
Shluk 6	191	27480
Shluk 7	200	27414
Shluk 8	188	27360
Shluk 9	119	14610

Zdroj: Vlastní zpracování.

Obdobným způsobem jsou vytvořeny shluky pomocí p-mediánu. Oproti předešlému případu využívá tento přístup úplnou matici vzdáleností. Výsledný výpočet proto zohledňuje skutečné vzdálenosti spojující jednotlivá svozová místa. Vytvořené shluky jsou tedy tvořeny vrcholy, mezi kterými jsou minimální vzdálenosti. Shluky byly vytvořeny na základě již nadefinované kapacitní podmínky obslužného vozidla. Výpočet byl proveden,

stejně jako v předešlém případě, v programu Xpress-IVE. Přehled vytvořených shluků je uveden v tabulce 5.4.

Tabulka 5.4 Shluky vytvořené p-medián přístupem.

Počet shluků	Počet vrcholů ve shluku	Kapacita shluků [litry]
Shluk 1	195	27496
Shluk 2	172	27335
Shluk 3	208	27274
Shluk 4	115	18230
Shluk 5	163	23663
Shluk 6	126	25775
Shluk 7	231	27475
Shluk 8	148	27418
Shluk 9	146	27395

Zdroj: Vlastní zpracování.

Počet shluků je v obou přístupech stejný. V další části budou pro nově vytvořené shluky symetrizovány jejich matice vzdáleností. Symetrizované matice vzdáleností jednotlivých shluků budou využity pro aplikaci Lin–Kernighanovy metody a v jednotlivých shlucích tak budou vytvořeny okružní jízdy obslužných vozidel.

5.3 Interpretace a zhodnocení dosažených výsledků

Výpočet Lin–Kernighanovy metody byl uskutečněn za pomoci online serveru NEOS Concorde [17]. Tento server slouží k řešení rozsáhlých symetrických úloh obchodního cestujícího s využitím různých nástrojů, například již zmíněné Lin–Kernighanovy metody. Výsledné délky okružních jízd pro oba přístupy jsou uvedeny v tabulce 5.5 a tabulce 5.6.

Množina okružních jízd, složená ze shluků vytvořených Sweep algoritmem, má celkovou délku 283 kilometrů. Oproti tomu má množina shluků vytvořených p-mediánem celkovou délku 303 kilometrů. Z tohoto pohledu lze považovat, pro tuto konkrétní úlohu, výsledky dekompozice a tvorbu shluků pomocí Sweep algoritmu za lepší.

Tabulka 5.5 Výsledné délky okružních jízd (Sweep algoritmus).

Shluk	Délky okružních jízd
Shluk 1	21,423 km
Shluk 2	30,189 km
Shluk 3	24,111 km
Shluk 4	23,399 km
Shluk 5	29,410 km
Shluk 6	32,394 km
Shluk 7	32,896 km
Shluk 8	53,161 km
Shluk 9	36,038 km

*Zdroj: Vlastní zpracování.***Tabulka 5.6** Výsledné délky okružních jízd (p-medián přístup).

Shluk	Délky okružních jízd
Shluk 1	43,999 km
Shluk 2	31,056 km
Shluk 3	22,344 km
Shluk 4	28,092 km
Shluk 5	35,132 km
Shluk 6	21,023 km
Shluk 7	37,187 km
Shluk 8	34,754 km
Shluk 9	48,973 km

Zdroj: Vlastní zpracování.

5.3.1 Reprezentace shluků

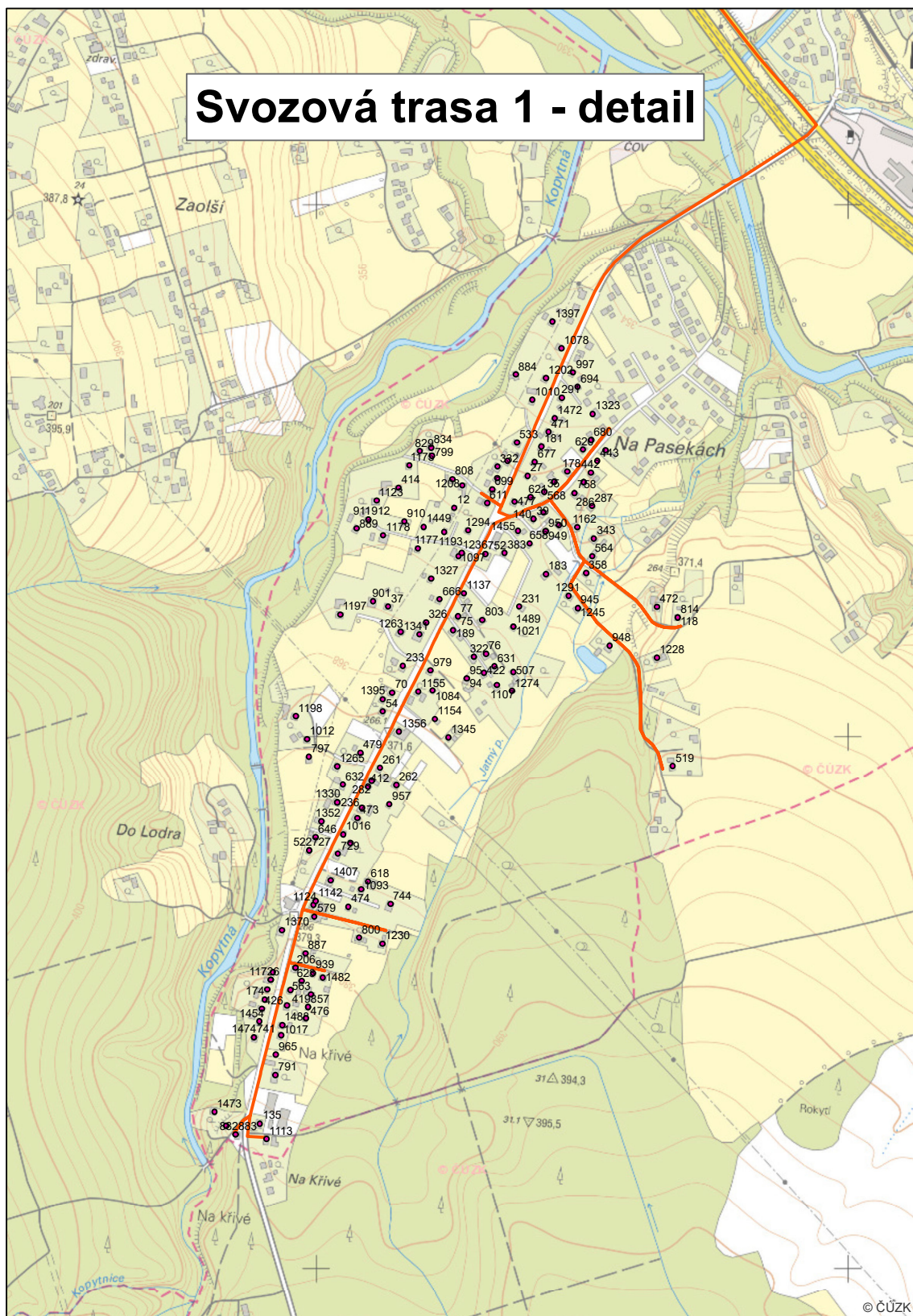
Podoba jednotlivých shluků je k nahlédnutí uvedena v příloze. V příloze jsou uvedeny všechny vytvořené shluky Sweep algoritmem a p-mediánem. Přílohy jsou uloženy v interaktivním souboru PDF, s možností zobrazování jednotlivých vrstev. V těchto vrstvách jsou uloženy mapy oblastí, jednotlivé vrcholy a také samotné trasy. Grafické zpracování příloh bylo vytvořeno ve spolupráci s paní Ing. Lucií Orlíkovou, Ph.D. Všechny vytvořené přílohy jsou uloženy na CD přiloženém k této diplomové práci.

Pro příklad jsou zde vybrány celkem dva shluky, vytvořené Sweep algoritmem a p-mediánem, reprezentované na obrázcích 5.1 a 5.3. Na obrázku 5.2 je pro lepší čitelnost znázorněna první svozová trasa, vytvořená s pomocí Sweep algoritmu, v detailním vyobrazení.



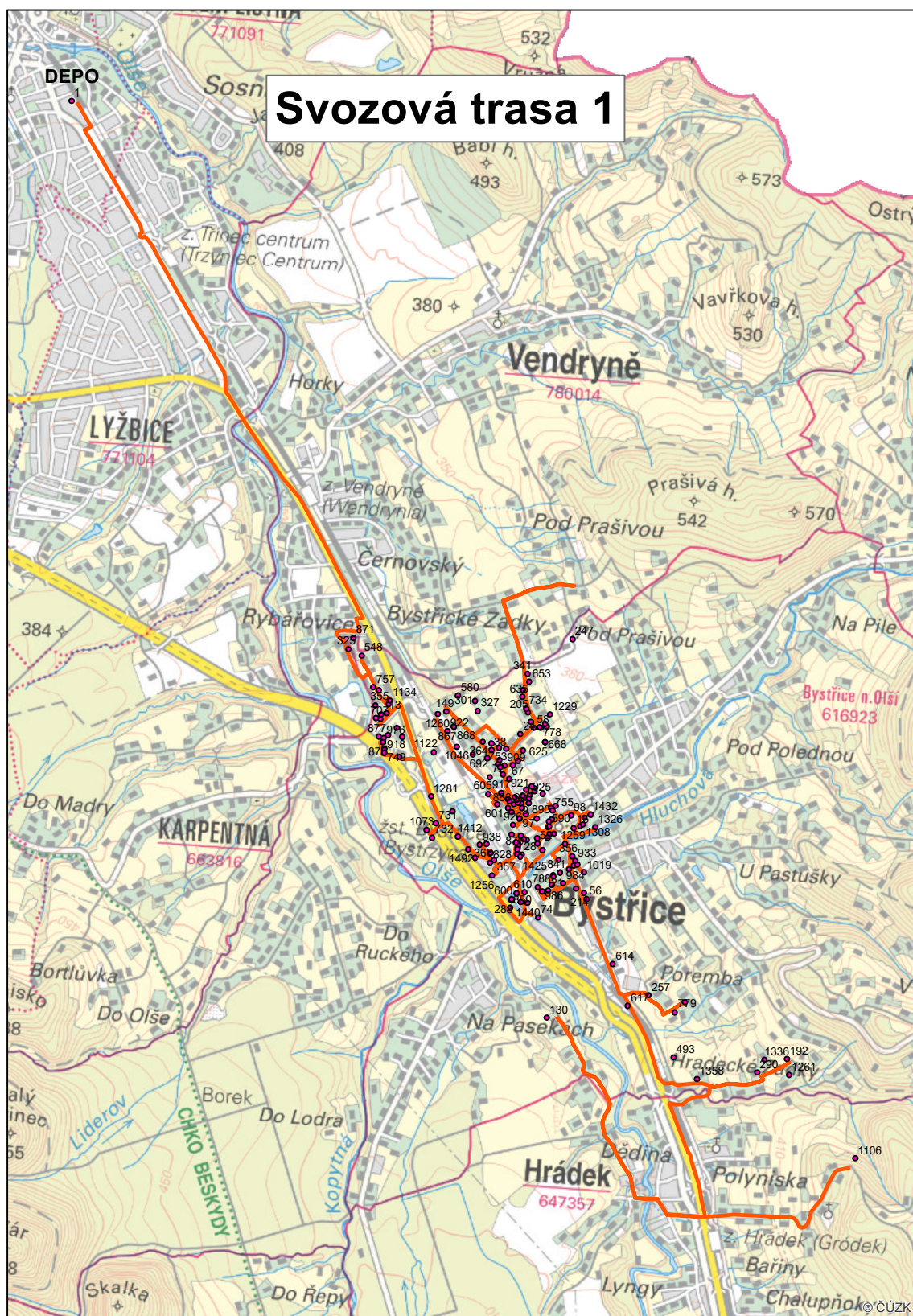
Obrázek 5.1 Svozová trasa pro shluk číslo 1, vytvořená Sweep algoritmem.

Zdroj: Grafické zpracování Ing. Lucie Orlíkové, Ph.D.



Obrázek 5.2 Svozová trasa pro shluk číslo 1, vytvořená Sweep algoritmem, v detailním vyobrazení.

Zdroj: Grafické zpracování Ing. Lucie Orlíkové, Ph.D.



Obrázek 5.3 Svozová trasa pro shluk číslo 1, vytvořená p-mediánem.

Zdroj: Grafické zpracování Ing. Lucie Orlíkové, Ph.D.

Kapitola 6

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo vytvořit okružní jízdy s minimální délkou pro vozidla zabezpečující svoz separovaného odpadu na území obce Bystřice. Podstata této práce tedy spočívá v návrhu efektivnějších tras obslužných vozidel, zabezpečujících svoz separovaného odpadu. Předmětem řešení předložené práce byla rozsáhlá reálná dopravní síť, na které byla vytvořena množina okružních jízd. Základ této práce tvoří teoretické poznatky z oblastí teorie grafů a matematického programování.

V úvodní části práce byla pozornost věnována problematice trasovacích úloh, mezi které svoz komunálního odpadu spadá. Cílem těchto úloh je vytvoření množiny okružních jízd na dopravní síti. Zvoleným přístupem k řešení zadané úlohy, byla metoda primárního shlukování. Tato metoda se skládá ze dvou fází. V první fázi byly vytvořeny množiny zákazníků - shluky, a ve druhé fázi byly vytvořeny okružní jízdy, pro každý jednotlivý shluk.

Pro obě fáze byl zformulován zadaný problém slovně, a následně byl vytvořen odpovídající matematický model. K vytvoření shluků byly využity dva přístupy. Prvním z nich byl Sweep algoritmus a druhým byl p-medián přístup. Výsledkem byly již zmíněné shluky, ve kterých byli zákazníci rozděleni tak, aby byla splněna kapacitní podmínka obslužného vozidla. Funkčnost obou přístupů byla ověřena na jednodušším matematickém modelu - numerickými experimenty, přičemž lepších výsledků výpočetních experimentů po návrhu optimálních tras dosahovaly shluky, které byly vytvořeny Sweep algoritmem. Matematické modely obou přístupů byly vytvořeny a následně vypočteny programem Xpress-IVE.

Druhá fáze metody primárního shlukování, je zaměřena na nalezení minimální Hamiltonovy kružnice a vytvoření okružní jízdy v každém jednotlivém shluku. Obecně je v této fázi řešena dopravní úloha, označovaná jako problém obchodního cestujícího. Za tímto účelem byly představeny heuristiky, které se dané problematice věnují. Jako první zde byla popsána metoda nejbližšího, dosud nenavštíveného vrcholu, která je sice výpočetně jednodušší, ale nedosahuje požadované přesnosti, jak bylo ověřeno na výpočetních experimentech řešených úloh. Pro srovnání vypočtených hodnot zmíněnou metodou, byla použita online knihovna netriviálních vzorových úloh, pro které již bylo nalezeno optimální řešení.

Z tohoto důvodu byla pro řešení zvolena Lin-Kernighanova metoda, která je výpočetně složitější, ale pro daný typ úlohy vhodnější. Volba Lin-Kernighanovy metody s sebou přinášela nutnost provést před samotným výpočtem symetrizaci vstupní matice vzdáleností. Následný výpočet byl poté uskutečněn s pomocí profesionálních online serverů NEOS.

Jakmile byla provedena kontrola výsledků a ověřena jejich správnost, následovala příprava na ostrý výpočet s poskytnutými reálnými daty od společnosti Nehlsen Třinec s.r.o. Příprava vstupních dat zahrnovala jejich třídění a separování nepodstatných informací z hlediska řešení zadané úlohy. Následně bylo provedeno geokódování vstupních dat, a vytvoření množiny vrcholů, na základě adres jednotlivých svozových míst, zahrnutých v jediné matici vzdáleností. Geokódování bylo provedeno v prostředí programu ArcGIS s pomocí paní Ing. Lucie Orlíkové, Ph.D. Následovala dekompozice úlohy s využitím již zmíněného Sweep algoritmu a p-medián přístupu. Po aplikování Lin-Kernighanovy metody byly získány dvě množiny shluků, obsahující délky jednotlivých okružních jízd. Z pohledu vypočtených hodnot, byly podobně jako u výpočetních experimentů dosaženy lepší výsledky u shluků vytvořených Sweep algoritmem. Jednotlivé shluky obsahující navržené svozové trasy jsou součástí přílohy této diplomové práce.

Výsledky této diplomové práce budou zahrnuty do programu TAČR, který se věnuje mimo jiné hledání nových způsobů ke zkvalitnění obsluhy dopravních sítí. Postupy, které zde byly popsány a aplikovány na reálných úlohách, lze využít k řešení celé řady dopravních úloh podobného charakteru, díky čemuž mohou sloužit ke zefektivňování dopravních tras. Přínos této práce spočívá v ověření skutečnosti, že zvolené teoretické postupy lze aplikovat na reálné úlohy různých rozsahů a je možné dosáhnout přípustných řešení v přijatelně krátkém čase. Využívání těchto metod se tak může stát významným zdrojem pro zkvalitňování dopravních služeb a s tím spojeným snižováním nákladů.

Literatura

Monografie

- [1] BONDY, J. A. a U. S. R. MURTY. Graph theory. New York: Springer, 2008. ISBN 978-1-84628-969-9.
- [2] DANĚK, Jan, TEICHMANN, Dušan. Optimalizace dopravních procesů. V Ostravě: Vysoká škola Báňská, 2005. ISBN 80-248-0996-6.
- [3] JABLONSKÝ, Josef. Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování. 3. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3
- [4] JANÁČEK, Jaroslav. Optimalizace na dopravních sítích. V Žiline: Žilinská univerzita, 2002. ISBN 80-8070-031-1.
- [5] JANÁČEK, Jaroslav. Matematické programování. 2., opr. vyd. V Žilině: EDIS, 2003. ISBN 80-8070-054-0.
- [6] JANÁČEK, Jaroslav, JÁNOŠÍKOVÁ Ľudmila, BUZNA Ľuboš, KOHÁNI Michal. Modelovanie a Optimalizácia. V Žiline: Žilinská univerzita, 2002. ISBN 978-80-554-0815-6
- [7] PALÚCH, Stanislav. Teória grafov. Žilina: EDIS, 2001. ISBN 80-7100-874-5.
- [8] SOBEK, Milan. Optimalizace tras pro svoz komunálního odpadu. V Ostravě: Vysoká škola Báňská, 2018.
- [9] XPRESS-Mosel "User guide"(2005), United Kingdom, Blisworth: Dash Associates.

Články

- [10] JONKER, R., VOLGENAT, T. (1983). Transforming asymmetric into symmetric traveling salesman problems. In: Faculty of Actuarial Science and Economic 1983. University of Amsterdam, the Netherlands
- [11] KUMAR, R. (2000). On Asymmetric TSP: Transformation to Symmetric TSP and Performance Bound. In: ResearchGate 2000. Iowa State University.
- [12] POMP, M., KOZEL, P., MICHALCOVÁ, Š., ORLÍKOVÁ, L. (2017). Using the Sweep Algorithm for decomposing a set of vertices and subsequent solution of the traveling

- salesman problem in decomposed subsets. In: Proceedings of 35th International Conference Mathematical Methods in Economics 2017 (pp. 584-589). Uherské Hradiště.
- [13] POMP, M., KOZEL, P., MICHALCOVÁ, Š., ORLÍKOVÁ, L. (2017). Využití p-mediánu pro základní dekompozici množiny vrcholů při návrhu tras obslužných vozidel. In: Proceedings of 35th International Conference Mathematical Methods in Economics 2017 (pp. 584-589). Uherské Hradiště.
- [14] REINELT, G. TSP Library 95. Institute für Angewandte Mathematik. Universität Heidelberg.

Internetové zdroje

- [15] ČESKÝ STATISTICKÝ ÚŘAD. ČSÚ: *Informace o produkci, využití a odstranění odpadů za rok 2018* [online]. 2019 [cit. 2020-4-20]. Dostupné z: <http://www.enviweb.cz/114889>.
- [16] OBEC BYSTRICE. *OBEC BYSTRICE: Harmonogram svozu odpadu pro rok 2020* [online]. 2020 [cit. 2020-4-20]. Dostupné z: <https://www.bystrice.cz/>.
- [17] The NEOS Server. *NEOS: Solver for symmetric Traveling Salesman Problem* [online]. 2020 [cit. 2020-4-21]. Dostupné z: <https://neos-server.org>

Seznam zkratek

ČSÚ	– Český statistický úřad
s.r.o	– s ručením omezeným
TSP	– Symetric traveling salesman problem - symetrická úloha obchodního cestujícího
GPS	– Global Positioning System - globální navigační systém
Id	– Identifikační
mil.	– milion
č.	– číslo
PDF	– Portable Document Format

Seznam obrázků

3.1	Reálná dopravní síť	11
3.2	Zjednodušená dopravní síť	12
3.3	Diagram grafu $G_1 = (V_1, H_1)$	16
3.4	Diagram hranově ohodnoceného grafu $G_2 = (V_2, H_2, c_2)$	16
3.5	Diagram digrafu $\vec{G}_3 = (V_3, H_3)$	16
3.6	Diagram hranově ohodnoceného digrafu $\vec{G}_4 = (V_4, H_4, c_4)$	17
3.7	Zobrazení přímé a nepřímé vzdálenosti mezi vrcholy i a j	21
4.1	Poloha jednotlivých obcí	28
4.2	Poloha jednotlivých obcí s počátkem v depu	30
4.3	Graf pro představení metody nejbližšího, dosud nenavštíveného vrcholu	38
5.1	Svozová trasa pro shluk číslo 1, vytvořená Sweep algoritmem	47
5.2	Svozová trasa pro shluk číslo 1, vytvořená Sweep algoritmem, v detailním vyobrazení	48
5.3	Svozová trasa pro shluk číslo 1, vytvořená p-mediánem	49

Seznam tabulek

3.1	Vrcholy dopravní sítě	13
3.2	Hrany dopravní sítě	14
3.3	Matice přilehlosti grafu G_1	18
3.4	Matice přilehlosti digrafu \vec{G}_3	18
3.5	Matice ohodnocení hran grafu G_2	19
3.6	Matice ohodnocení hran digrafu \vec{G}_4	19
4.1	Vstupní údaje pro příklad 4.1	29
4.2	Výstup výpočtu v programu Xpress-IVE pro příklad 4.1	31
4.3	Tvorba shluků Sweep algoritmem v příkladu 4.1	32
4.4	Tvorba shluků s využitím p-mediánu v příkladu 4.1	35

4.5	Srovnání výsledků Hamiltonovy kružnice pro Sweep algoritmus a p-medián v příkladu 4.1	36
4.6	Srovnání optimálního řešení s výsledky metody nejbližšího, dosud ne- navštíveného vrcholu	39
5.1	Ukázka vstupních dat (první část)	42
5.2	Ukázka vstupních dat (druhá část)	43
5.3	Shluky vytvořené Sweep algoritmem	44
5.4	Shluky vytvořené p-medián přístupem	45
5.5	Výsledné délky okružních jízd (Sweep algoritmus)	46
5.6	Výsledné délky okružních jízd (p-medián přístup)	46

Prohlášení o využití výsledků diplomové práce

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. (autorský zákon), zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo;
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně, ke své vnitřní potřebě, diplomovou práci užít (§ 35, odst. 3);
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě archivována v Ústřední knihovně VŠB-TUO a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že bibliografické údaje o diplomové práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO;
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12, odst. 4 autorského zákona;
- bylo sjednáno, že užít své dílo, diplomovou práci, nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).

V Ostravě dne 15. května 2020

.....

Bc. Milan Sobek

Přílohy

A	Mapy shluků pro Sweep algoritmus	i
B	Mapy shluků pro p-medián	ii

A Mapy shluků pro Sweep algoritmus

- 1. trasa 2 SA**
- 2. trasa 3 SA**
- 3. trasa 4 SA**
- 4. trasa 5 SA**
- 5. trasa 6 SA**
- 6. trasa 7 SA**
- 7. trasa 8 SA**
- 8. trasa 9 SA**

B Mapy shluků pro p-medián

- 1. trasa 2 pmed**
- 2. trasa 3 pmed**
- 3. trasa 4 pmed**
- 4. trasa 5 pmed**
- 5. trasa 6 pmed**
- 6. trasa 7 pmed**
- 7. trasa 8 pmed**
- 8. trasa 9 pmed**